مبادئ الرياضيات المتقطعة

$0 \le r_2 < 2$

تأليف
الدكتور معروف عبد الرحمن سمحان
الدكتور أحمد حميد شراري

جامعة الملك سعود
النشر العلمي والمطابع







مبادىء الرياضيات المتقطعة

تأليـــف

الدكتور / معروف عبد الرحمن سمحان الدكتور / أحمد حمـيد شراري

قسم الرياضيات - كلية العلوم
جامعة الملك سعود



إصدار: النشر و المطابع ـ جامعة الملك سعود
ص.ب. : ٢٤٥٤ ـ الرياض ١١٤٥١ ـ المملكة العربية السعودية

ح جامعة الملك سعود ١٤٢٢هـ/٢٠٠١م

الطبعة الأولى ١٤١٦هـ (١٩٩٥م)
الطبعة الثانية ١٤٢٢هـ (٢٠٠١م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

سمحان، معروف عبد الرحمن

مبادىء الرياضيات المتقطعة/معروف عبد الرحمن سمحان، أحمد حميد شراري – ط٢. – الرياض.

٤٣٨ ص ١٧ × ٢٤سم

ردمك : × - ٢٤٣ -٣٧ - ٩٩٦٠

١- الرياضيات - تعليم. أ- شراري، أحمد حميد (م. مشارك)

ب- العنوان

ديوي٧ , ٥١٠ ٢٢/٠٠٥٣

رقم الإيداع :٢٢/٠٠٥٣
ردمك : × - ٢٤٣ -٣٧ - ٩٩٦٠

وافق المجلس العلمي على إعادة طباعته بتاريخ ١٠/١١/١٤٢١هـ الموافق ٢٠٠١/٢/٤هـ

النشر العلمي والمطابع ١٤٢٢هـ

تقديم

إنه لأمر طبيعي أن يُجمِع العاملون في حقل التعليم في العالم العربي على تعريب العلوم الإنسانية والرياضية والطبيعية. فالتعريب يزيد الاستيعاب ويعمق الفهم ويساعد أكبر عدد من أبناء العالم العربي على تحقيق طموحاتهم العلمية. ومن الملاحظ أن المتخصصين يبذلون جهودا كبيرة من أجل إثراء المكتبة العربية بالتأليف والترجمة، كما أن هناك ازديادا ملحوظا في عدد الجامعات التي تستعمل اللغة العربية لغة للتدريس.

إن هذا الكتاب إضافة متواضعة إلى المكتبة الرياضية العربية. ولقد كان الباعث على تأليفه ندرة الكتب العربية التي تعالج موضوعات الرياضيات المتقطعة. إن العلاقة المباشرة بين هذا الحقل الرياضي وعلوم الحاسوب زودت الرياضيين بمسائل متنوعة ووجهت اهتمامهم نحو آفاق بحثية جديدة.

لا يوجد إجماع على الموضوعات التي يجب أن يتضمنها مُدْخَل إلى الرياضيات المتقطعة. إن لُبّ هذا الكتاب يتكون من مادة نقوم بتدريسها لطلبة - غير متخصصين في الرياضيات - في مرحلة الدبلوم وفي مرحلة البكالوريوس، حيث نقدم إثباتات كاملة لمبرهنات قليلة مختارة ونتوسع في عرض الأمثلة ومناقشة التطبيقات.

ولقد استخدمنا المصطلحات العلمية الموجودة في المعجم الصادر عن مكتب تنسيق التعريب بالرباط ، وفي معجم الرياضيات الصادر عن مؤسسة الكويت للتقدم العلمي ، واجتهدنا بوضع المصطلحات التي احتجنا إليها ولم ترد في هذين المعجمين .

ونود أن نسجل لجامعة الملك سعود شكرنا على تشجيعها وتبنيها نشر هذا الكتاب الذي نأمل أن ينتفع به طلاب العلم ، ولايفوتنا أن ننوه بالجهد الكبير الذي قام به المحكمون حيث قدّموا لنا العديد من المقترحات والتي أخذنا بمعظمها واكتشفوا الكثير من الأخطاء المطبعية . والله من وراء القصد .

المؤلفان
معروف عبدالرحمن سمحان
أحمد حميد شراري

المحتويات

الصفحة

الصفحة

الفصل الثاني : المنطق الرياضي

الصفحة

الفصل الثالث : طرائق البرهان

الفصل الرابع : العلاقات

الصفحة

الفصل الخامس : الجبريات البُولية وتطبيقاتها

الفصل السادس : مدخل إلى نظرية الرسومات

الصفحة

الفصل السابع : العدّ

الصفحة

الفصل الأول

الأنظمة العددية

NUMBER SYSTEMS

(١,١) مقدمة
Introduction

لقد استخدم الإنسان في تاريخه الطويل أنظمة عددية مختلفة والنظام العشري (decimal system) هو أحد هذه الأنظمة. يستخدم النظام العشري عشرة أرقام (digits) هي :

0 ,1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9

وهذه هي الأعداد الصحيحة من صفر إلى تسعة. وبناء على ذلك، إن أساس هذا النظام هو عشرة (أساس أي نظام عددي هو عدد الأرقام المختلفة المستخدمة فيه) .
إن أي عدد صحيح موجب يمكن كتابته في النظام العشري على شكل سلسلة منتهية عناصرها أرقام عشرية أو على صورة مجموع قوى للعدد 10، فمثلا العدد 9462 يمكن كتابته على الصورة :

$$9462 = 9 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 2 \times 10^0 .$$

إن قوى العدد 10 في التمثيل أعلاه تدل على منزلة أرقام العدد.

من الجدير بالذكر هنا هو عدم وجود سبب واضح لاستخدامنا النظام العشري إلا وجود عشرة أصابع لدينا، فلقد سبق للبابليين أن استخدموا نظامًا أساسه 60،

كذلك استخدم المايانيون (شعوب عاشت في أمريكا الوسطى والمكسيك) نظامًا أساسه 20 . وتستخدم الحواسيب النظام الثنائي (binary system) والنظام الثماني (octal system) والنظام الستة عشري (hexadecimal system)وفي الحقيقة أن أي عدد صحيح أكبر من الواحد يصلح أن يكون أساسا لنظام عددي . سوف ندرس في هذا الفصل ، بشيء من التفصيل ، الأنظمة الثلاثة المستخدمة في الحواسيب . وفي كل من هذه الأنظمة ندرس كيفية تحويل أي عدد من نظام إلى آخر وكذلك تحويل أي عدد من هذه الأنظمة إلى النظام العشري وبالعكس . وكذلك سوف ندرس العمليات الحسابية على هذه الأنظمة مستفيدين من معلوماتنا عن هذه العمليات في النظام العشري .

(١,٢) النظام الثنائي

Binary System

النظام الثنائي هو نظام عددي بسيط يستخدم رقمين فقط ، هما 1 , 0 . وعليه ، فإن أساسه 2 .

ويرجع سبب استخدام هذا النظام في الحواسيب إلى أن هذه الحواسيب تعمل بالكهرباء ونحن نعلم أن الدائرة الكهربائية إما أن تكون متصلة (ON) أو منفصلة (OFF) . وعليه ، فإن الرقم 0 يدل على أن الدارة الكهربائية تكون منفصلة والرقم 1 يدل على أنها متصلة .

كما في النظام العشري ، فإن أي عدد في هذا النظام يمكن تمثيله إما كسلسلة منتهية كل رقم فيها إما 0 أو 1 ، أو كمجموع قوى للعدد 2 . سوف نستخدم الدليل الأدنى 2 للدلالة على أن العددَ المعطى هو عدد ثنائي .

مثال (١ ,١)

اكتب العدد 101001_2 كمجموع قوى للعدد 2 .

الحل

$$101001_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

(١ ,٢ ,١) التحويل من النظام الثنائي إلى النظام العشري
Binary to decimal conversion

لتحويل أي عدد من النظام الثنائي إلى النظام العشري، نستخدم طريقة كتابة العدد بالشكل المنشور (أي كمجموع قوى للعدد 2).

مثال (١,٢)

اكتب العدد 1101001_2 في النظام العشري.

الحل

$$\begin{aligned} 1101001_2 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 64 + 32 + 0 + 8 + 0 + 0 + 1 \\ &= 105 \end{aligned}$$

(٢ ,٢ ,١) الكسور الثنائية Binary fractions

كما هو الحال في النظام العشري، يمكن أن يحتوي العدد الثنائي على كسور وهي عبارة عن أرقام ثنائية تكون على يمين العدد بعد الفاصلة. ولهذه الكسور معنى مماثل للكسور العشرية.

مثال (١,٣)

حول العدد 110.001_2 إلى عدد عشري.

الحل

$$110.001_2 = 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}$$
$$= 4 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0.125$$
$$= 6.125$$

مثال (١,٤)

حول 0.11101_2 إلى عدد عشري.

الحل

$$0.11101_2 = 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 0\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5}$$
$$= 0.5 + 0.25 + 0.125 + 0 + 0.03125$$
$$= 0.90625$$

(١,٢,٣) التحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي Decimal to binary conversion

تُدْخَل البيانات إلى الحاسوب على شكل أعداد عشرية ثم يقوم الحاسوب بتحويلها داخليًا إلى أعداد ثنائية وقبل أن يقوم الحاسوب بإخراج البيانات للمستخدم يعيد تحويلها ثانية إلى أعداد عشرية. لقد قمنا حتى الآن بدراسة تحويل الأعداد من النظام الثنائي إلى النظام العشري، سندرس الآن طريقة لتحويل الأعداد من النظام العشري إلى النظام الثنائي. والطريقة هي عبارة عن خوارزمية سهلة تعتمد على خوارزمية القسمة.

خوارزمية (١,١)

لتحويل العدد العشري m إلى عدد ثنائي، نتبع الخطوات التالية :

(١) نستخدم خوارزمية القسمة لقسمة العدد m على العدد 2 لنحصل على عددين q_1 و r_1 يحققان :

$$0 \le r_1 < 2 \quad , \quad m = 2q_1 + r_1$$

(٢) إذا كان $q_1 = 0$ في الخطوة (١) فإننا نتوقف .

(٣) إذا كان $q_1 \neq 0$ نكرر الخطوة (١) على العددين q_1 و 2 لنحصل على عددين q_2 و r_2 يحققان :

$$0 \le r_2 < 2 \quad , \quad q_1 = 2q_2 + r_2$$

(٤) نكرر الخطوات (١) إلى (٣) حتى نحصل على خارج قسمة مساوٍ الصفر وليكن $q_k = 0$. وبعد الخطوة k، يكون لدينا :

$$\begin{array}{lcl}
0 \le r_1 < 2 & , & m = 2q_1 + r_1 \\
0 \le r_2 < 2 & , & q_1 = 2q_2 + r_2 \\
0 \le r_3 < 2 & , & q_2 = 2q_3 + r_3 \\
\vdots & & \vdots \\
0 \le r_k < 2 & , & q_{k-1} = 2q_k + r_k
\end{array}$$

و $q_k = 0$.

(٥) عندئذٍ، يكون

$$m = (r_k \; r_{k-1} \ldots \; r_3 r_2 r_1)_2 .$$

مثال (١,٥)

حول العدد 55 إلى النظام الثنائي .

الحل

$$55 = 2 \times 27 + 1$$
$$27 = 2 \times 13 + 1$$
$$13 = 2 \times 6 + 1$$
$$6 = 2 \times 3 + 0$$
$$3 = 2 \times 1 + 1$$
$$1 = 2 \times 0 + 1$$

نتوقف الآن ويكون :

$$55 = 110111_2$$

مثال (١,٦)

اكتب العدد 453 في النظام الثنائي .

الحل

$$453 = 2 \times 226 + 1$$
$$226 = 2 \times 113 + 0$$
$$113 = 2 \times 56 + 1$$
$$56 = 2 \times 28 + 0$$
$$28 = 2 \times 14 + 0$$
$$14 = 2 \times 7 + 0$$
$$7 = 2 \times 3 + 1$$
$$3 = 2 \times 1 + 1$$
$$1 = 2 \times 0 + 1$$

نتوقف الآن لنحصل على :

$$.453 = 111000101_2$$

(١,٢,٤) تحويل الكسور العشرية إلى كسور ثنائية
Decimal fractions to binary fractions conversion

لتحويل الكسر العشري إلى كسر ثنائي ، نبدأ بضرب الكسر العشري بالعدد 2 ثم

نكتب حاصل الضرب كمجموع عدد صحيح وعدد كسري. العدد الصحيح الذي حصلنا عليه هو أول رقم ثنائي للكسر المراد تحويله. أما الكسر فإننا نقوم بضربه بالعدد 2 ونكرر العملية. مما سبق، نجد إحدى الإمكانيات التالية :

(١) الجزء الكسري من العدد يكون صفراً، عند ذلك، نتوقف.

(٢) نحصل على متتالية دورية من الأعداد، عند ذلك، نتوقف عندما نحصل على العدد الأول في ثالث ظهور لمجموعة الأعداد التي تتكرر.

(٣) لانستطيع الحصول على الخطوة (١) أو الخطوة (٢). عندئذ، نتوقف بعد أن نحصل على درجة من التقريب مقبولة لنا.

مثال (١,٧)

حوّل الكسر العشري 0.5625 إلى كسر ثنائي.

الحل

$$0.5625 \times 2 = 0.1250 + 1$$
$$0.1250 \times 2 = 0.2500 + 0$$
$$0.2500 \times 2 = 0.5000 + 0$$
$$0.5000 \times 2 = 0.0000 + 1$$

نتوقف الآن لأننا حصلنا على كسر مساو للصفر وبذلك، يكون :

$$0.5625 = 0.1001_2$$

مثال (١,٨)

حوّل الكسر العشري 0.35 إلى كسر ثنائي.

الحل

$0.35 \times 2 = 0.7 + 0$
$0.7 \times 2 = 0.4 + 1$
$0.4 \times 2 = 0.8 + 0$
$0.8 \times 2 = 0.6 + 1$
$0.6 \times 2 = 0.2 + 1$
$0.2 \times 2 = 0.4 + 0$
$0.4 \times 2 = 0.8 + 0$
$0.8 \times 2 = 0.6 + 1$
$0.6 \times 2 = 0.2 + 1$
$0.2 \times 2 = 0.4 + 0$
$0.4 \times 2 = 0.8 + 0$
$0.8 \times 2 = 0.6 + 1$

نتوقف الآن ونحصل على: $0.35 = 0.010110011001_2$.

لتحويل عدد مختلط، نقوم بتحويل العدد الصحيح أولا ثم الكسر ثانيًا ونستخدم النتيجتين لنحصل على التحويل المطلوب.

مثال (١,٩)

حوّل العدد 14.5625 إلى عدد ثنائي.

الحل

نقوم بتحويل العدد الصحيح 14 لنحصل على:

$14 = 2 \times 7 + 0$
$7 = 2 \times 3 + 1$
$3 = 2 \times 1 + 1$
$1 = 2 \times 0 + 1$

إذن،

$14 = 1110_2$.

أمـا بالنسبة للكسـر 0.5625 فإنـنا قمـنا بتحويلـه فـي المثال (١,٧) وحصلنا على :

$$0.5625 = 0.1001_2$$

وبالتالي ، فإن :

$$14.5625 = 1110.1001_2$$

(١,٢,٥) العمليات الحسابية في النظام الثنائي

Arithmetic in the binary system

لإجـراء الحسـابات فـي النظـام الثنـائي ، يلزمنـا أن نتعلـم العمـليـات الحسـابيـة الأسـاسـيـة : الجمـع ، الطـرح ، الضـرب والقسمـة . سنبـدأ بدراسـة الجمـع في النظـام الثنـائي .

(١,٢,٥,١) الجمع (Addition)

لجمع عددين أو أكثر في النظام الثنائي ، نتبع نفس الأسس والقواعد المتبعة في النظام العشري ولكن يلزمنا أولاً جدول الجمع في النظام الثنائي :

جدول (١,١)

+	0	1
0	0	1
1	1	10

مثال (١,١٠)

اجمع $1010_2 + 1011_2$.

الحل

$$\begin{array}{r} \scriptsize{\textcircled{1}} \\ 1010 \\ +\ 1011 \\ \hline 10101 \end{array}$$

إذن، $1010_2 + 1011_2 = 10101_2$.

مثال (١,١١)

اجمع $100110_2 + 101110_2$

الحل

$$\begin{array}{r} \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1} \\ 100110 \\ +\ 101110 \\ \hline 1010100 \end{array}$$

إذن، $100110_2 + 101110_2 = 1010100_2$

ملاحظة

هناك أكثر من طريقة لجمع أكثر من عددين في النظام الثنائي وإحدى هذه الطرق هي جمع عددين في كل مرة وهذا مايوضحه المثال التالي :

مثال (١,١٢)

جد ناتج الجمع التالي :

$100110_2 + 101110_2 + 110101_2 + 101101_2$

الحل

في المثال (١,١١)، وجدنا أن :

$100110_2 + 101110_2 = 1010100_2$

نجري الآن عملية الجمع على العددين الآخرين

$$\begin{array}{rccccccc} & ① & ① & ① & ① & & ① & \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ + & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

الآن نحسب $1010100_2 + 1100010_2$

$$\begin{array}{r} 1010100 \\ +\ 1100010 \\ \hline 10110110 \end{array}$$

إذن،

$100110_2 + 101110_2 + 110101_2 + 101101_2 = 10110110_2$.

(١,٢,٥,٢) الطرح (Subtraction)

قبل أن نناقش عملية الطرح في النظام الثنائي، سنتطرق إلى طريقتين لطرح الأعداد في النظام العشري، وهاتان الطريقتان مكافئتان لطريقة الاستلاف المتداولة ولكنهما تعتمدان على المتممات. متمم التسعات (nines complement) للعدد العشري x هو العدد الناتج من طرح كل رقم من أرقام العدد x من الرقم 9.

مثال (١,١٣)

جد متمم التسعات لكل من العددين :

382 ، 95024.

الحل

متمم التسعات للعدد 382 هو 617 . أما متمم التسعات للعدد 95024 فهو 04975.

تزودنا الخوارزمية التالية بطريقة لطرح الأعداد العشرية بدون استلاف ، وهذه الطريقة تعتمد على متمم التسعات .

خوارزمية (١,٢)

إذا كان للعددين العشريين x , y عدد الأرقام نفسه وكان $x > y$. وإذا رمزنا لمتمم التسعات للعدد y بالرمز $\overline{y}$ فإننا لكي نجد حاصل الطرح $x - y$ نتبع الخطوات التالية :

(١) أولا نجد حاصل الجمع $x + \overline{y}$.

(٢) ننقل الرقم الواقع في أقصى يسار النتيجة التي حصلنا عليها في الخطوة (١) إلى أسفل الرقم الواقع في أقصى اليمين ثم نجمع .

مثال (١,١٤)

استخدم الخوارزمية (١,٢) لإيجاد حاصل الطرح 3457 - 7625.

الحل

متمم التسعات للعدد 3457 هو 6542.

الآن :

```
      7625
+     6542
----------
 1   4167
 |
 └──► +1
     -----
     4168
```

إذن، $7625 - 3457 = 4168$.

ملاحظة

إذا كان $x > y$ وكان عدد الأرقام في y أقل من عدد الأرقام في x يُجْعل عدد الأرقام نفسه بإضافة أصفار على يمين العدد y ثم نطبق الخوارزمية وهذا ما يوضحه المثال التالي.

مثال (١,١٥)

استخدم خوارزمية (١,٢) لإيجاد حاصل الطرح :

$5426 - 287$

الحل

متمم التسعات للعدد 0287 هو 9712. الآن :

```
      5426
+     9712
----------
 1   5138
 |
 └──► +1
     -----
     5139
```

إذن، $5426 - 287 = 5139$.

الطريقة الثانية لطرح الأعداد العشرية تعتمد على متمم العشرات (tens complement) للعدد العشري x وهو متمم التسعات للعدد x مضافا إليه 1 .

مثال (١,١٦)

جد متمم العشرات للعدد 591 .

الحل

متمم العشرات للعدد 591 هو $409 = 1 + 408$.

لاستخدام متمم العشرات لطرح الأعداد العشرية، نتبع خطوات الخوارزمية التالية:

خوارزمية (١,٣)

إذا كان للعددين العشريين x و y نفس عدد الأرقام، وإذا رمزنا لمتمم العشرات للعدد y بالرمز $\overline{\overline{y}}$ ، لكي نجد حاصل الطرح x- y ، نتّبع الخطوات التالية :

(١) نجد $x + \overline{\overline{y}}$

(٢) إذا كان عدد أرقام العدد الذي حصلنا عليه في الخطوة (١) يزيد رقمًا على عدد أرقام x أو $\overline{\overline{y}}$ فإن حاصل الطرح x-y يكون موجبًا وهو العدد الذي حصلنا عليه في الخطوة (١) محذوفاً منه الرقم الواقع في أقصى اليسار.

(٣) إذا كان عدد أرقام العدد الذي حصلنا عليه في الخطوة (١) مساويًا عدد أرقام x

أو $\overline{\overline{y}}$ فإن حاصل الطرح $x-y$ يكون سالبا ونحصل عليه بإيجاد متمم العشرات للعدد $x+\overline{\overline{y}}$ مسبوقًا بإشارة سالب .

مثال (١,١٧)

استخدم خوارزمية (١,٣) لإيجاد 332 - 591 .

الحل

متمم العشرات للعدد 332 هو 668.

الآن

$$\begin{array}{r} 591 \\ + \underline{668} \\ 1259 \end{array}$$

نحذف الآن الرقم 1 من العدد 1259 لنحصل على :
$.591 - 332 = 259$

مثال (١,١٨)

استخدم خوارزمية (١,٣) لإيجاد 582 - 245 .

الحل

متمم العشرات للعدد 582 هو 418 = 1 + 417 .

الآن :

$$\begin{array}{r} 245 \\ + \underline{418} \\ 663 \end{array}$$

نجد الآن متمم العشرات للعدد 663 وهو 337.

إذن، $245 - 582 = -337$.

ملاحظة

إن إحدى أهم المميزات للخوارزميتين (١,٢) و (١,٣) هي إمكانية استخدامها لطرح عددين في أي من الأنظمة العددية التي سندرسها مع مراعاة التغيير في المتممات بما يناسب النظام الذي نعمل به. لاستخدام خوارزمية (١,٢) لطرح عددين في النظام الثنائي، نتبع الخطوات نفسها مع مراعاة استخدام متمم الواحدات بدلاً من متمم التسعات. أما لاستخدام خوارزمية (١,٣) فإننا نستبدل متمم العشرات بمتمم الثنائيات.

مثال (١,١٩)

استخدام خوارزمية (١,٢) لإيجاد $111001_2 - 11001_2$

الحل

متمم الواحدات للعدد 011001_2 هو 100110_2

الآن :

$$\begin{array}{r} 111001 \\ +\ 100110 \\ \hline 1011111 \\ \llcorner\!\!\rightarrow +1 \\ \hline 100000 \end{array}$$

إذن، $111001_2 - 11001_2 = 100000_2$.

مثال (١,٢٠)

جد متمم الثنائيات للعدد 10111_2 .

الحل

متمم الثنائيات هو $01000_2 + 1_2 = 01001_2$.

مثال (١,٢١)

استخدم خوارزمية (١,٣) لإيجاد $101101_2 - 110001_2$.

الحل

متمم الثنائيات للعدد 110001_2 هو $001110_2 + 1_2 = 001111_2$. الآن :

$$\begin{array}{rcccccc} & ① & ① & ① & ① & & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ + & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

بما أن الناتج له نفس عدد أرقام العدد المطروح منه فإننا نجد متمم الثنائيات للعدد 111100_2 وهو 000100_2. إذن

$101101_2 - 110001_2 = - 000100_2 = - 100_2$.

مثال (١,٢٢)

استخدم خوارزمية (١,٣) لإيجاد حاصل الطرح $10011_2 - 1010_2$.

الحل

متمم الثنائيات للعدد 01010_2 هو $10101_2 + 1_2 = 10110_2$. الآن :

$$\begin{array}{r} 10011 \\ +\ \underline{10110} \\ 101001 \end{array}$$

بما أن عدد أرقام الناتج أكبر من عدد أرقام العدد المطروح منه، فإننا نحذف الرقم الواقع في أقصى اليسار لنحصل على :

$.10011_2 - 1010_2 = 01001_2 = 1001_2$

(١,٢,٥,٣) الضـرب (Multiplication)

إن طريقة ضـرب الأعداد في النظام الثنائي هي نفس الطريقة المتبعـة في النظام العشري وتعتمد على جدول الضرب التالي :

جدول (١,٢)

×	0	1
0	0	0
1	0	1

مثال (١,٢٣)

جد حاصل الضرب $101_2 \times 1011_2$.

الحل

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times\ \underline{101} \\ 1011 \\ 0000 \end{array}$$

$$+\underline{1011\quad}$$

$$110111$$

إذن، $1011_2 \times 101_2 = 110111_2$

(٤,٥,٢,١) القسمة (Division)

لقسمة عددين ثنائيين، نتبع نفس الطريقة المتبعة في النظام العشري.

مثال (١,٢٤)

اقسم $10010_2 \div 11_2$

الحل

```
          110
      ┌──────────
  11  │  10010
 ─────┘ - 11
        ─────
          11
        - 11
        ─────
          00
        - 00
        ─────
          00
```

إذن، $10010_2 \div 11_2 = 110_2$.

مثال (١,٢٥)

اقسم $1110100_2 \div 1011_2$.

الحل

$$
\begin{array}{r|l}
 & \overline{\ \ 1010} \\
1011 & 1110100 \\
 & -1011 \\
 & \overline{00111} \\
 & -\ \ 0000 \\
 & \overline{\ \ 1110} \\
 & -\ \ 1011 \\
 & \overline{\ \ \ 110} \\
 & -\ \ \ 000 \\
 & \overline{\ \ \ 110}
\end{array}
$$

بما أن العدد 110_2 أصغر من العدد 1011_2 نتوقف ويكون خارج قسمة العددين هو 1010_2 والباقي 110_2 .

تمارين (١,٢)

في كل التمارين من ١ إلى ١٥ حوّل إلى النظام العشري

(١) 1110_2 (٢) 1001_2 (٣) 1111_2

(٤) 10111_2 (٥) 10101_2 (٦) 11100_2

(٧) 111010_2 (٨) 110010_2 (٩) 111101_2

(١٠) 10.001_2 (١١) 11.0011_2 (١٢) 10.11_2

(١٣) 10101.001_2 (١٤) 0.0000011_2 (١٥) 1111011001_2

في كل التمارين من ١٦ إلى ٢٤ حوِّل إلى النظام الثنائي :

(١٦) 542 (١٧) 352 (١٨) 390

(١٩) 0.5635 (٢٠) 0.2 (٢١) 0.45

(٢٢) 23.475 (٢٣) 13.34 (٢٤) 72.1

في كل التمارين من ٢٥ إلى ٢٨ جد حاصل الجمع

(٢٥) $1101_2 + 101_2$ (٢٦) $111_2 + 10011_2$ (٢٧) $101011_2 + 110110_2$

(٢٨) $1011011_2 + 1101111_2$.

في كل التمارين من ٢٩ إلى ٣٦ استخدم خوارزمية (١,٢) أو خوارزمية (١,٣) لإيجاد حاصل الطرح.

(٢٩) 2605 - 8753 (٣٠) 1324 - 1372 (٣١) 289 - 3000

(٣٢) 560 - 4550 (٣٣) $10101_2 - 100101_2$ (٣٤) $1111111_2 - 101010101_2$

(٣٥) $11111_2 - 1010111_2$ (٣٦) $1111111_2 - 1010111_2$.

في كل التمارين من ٣٧ إلى ٤٠ جد حاصل الضرب :

(٣٧) $11_2 \times 101_2$ (٣٨) $1101_2 \times 1001_2$ (٣٩) $1011_2 \times 110011_2$

(٤٠) $110110_2 \times 101010_2$

في كل التمارين من ٤١ إلى ٤٤ جد خارج القسمة :

(٤١) $11011010_2 \div 11011_2$ (٤٢) $101101_2 \div 101_2$

(٤٣) $100001_2 \div 1111_2$ (٤٤) $100101111_2 \div 1001010_2$

(١,٣) النظام الثماني
The Octal System

يعدُّ النظام الثنائي نظامًا مثاليًا في الحواسيب الآلية حيث يتم بوساطته فرز المعلومات ومعالجتها واستردادها ولكنه غير مريح تمامًا للمبرمج لكثرة عدد المنازل المستخدمة في تمثيل أي عدد، صغيراً كان أو كبيرا، ومن هنا فإن حاجة المبرمج لأنظمة مثل النظام الثماني أو النظام الستة عشري تصبح ملحة لأن التعامل معها أسهل من التعامل مع النظام الثنائي، ووجود علاقة خاصة بينها وبين النظام الثنائي يسهل على الحاسوب استخدامها. سندرس في هذا البند النظام الثماني وسنرجيء دراسة النظام الستة عشري للبند (١,٤).

يستخدم النظام الثماني ثمانية أرقام هي :

0 , 1 , 2 ,3, 4 , 5 , 6 , 7

وعليه، فإن أساسه 8. نستخدم الدليل الأدنى 8 للدلالة على أن العدد مكتوب في النظام الثماني. وكما في النظام العشري والنظام الثنائي، فإن أي عدد ثماني يمكن كتابته على صورة مجموع قوى للعدد 8. وهذه الصورة تسمى الشكل المنشور للعدد.

مثال (١,٢٦)

اكتب الشكل المنشور للعدد 5731_8 .

الحل

$$5731_8 = 5\times 8^3+7\times 8^2+3\times 8^1+1\times 8^0.$$

(١,٣,١) التحويل من النظام الثماني إلى النظام العشري
Octal to decimal conversion

لتحويل العدد الثماني إلى عدد عشري، نستخدم طريقة كتابة العدد بالشكل المنشور.

مثال (١,٢٧)

حول العدد 3703_8 إلى عدد عشري.

الحل

$$3703_8 = 3\times8^3 + 7\times8^2 + 0\times8^1 + 3\times8^0$$
$$= 3 \times 512 + 7 \times 64 + 0 + 3$$
$$= 1536 + 448 + 3$$
$$= 1987$$

مثال (١,٢٨)

حول العدد 0.235_8 إلى عدد عشري.

الحل

$$0.235_8 = 2\times8^{-1} + 3\times8^{-2} + 5\times8^{-3}$$
$$= 2 \times 0.125 + 3\times0.015625 + 5\times0.001953$$
$$= 0.30664$$

(١,٣,٢) التحويل من النظام العشري إلى النظام الثماني
Decimal to octal conversion

نستخدم لهذا الغرض خوارزمية (١,١) مع الأخذ بعين الاعتبار استبدال الأساس 2 بالأساس 8.

مثال (١,٢٩)

حول العدد العشري 5738 إلى عدد ثماني .

الحل

$$5738 = 8 \times 717 + 2$$
$$717 = 8 \times 89 + 5$$
$$89 = 8 \times 11 + 1$$
$$11 = 8 \times 1 + 3$$
$$1 = 8 \times 0 + 1$$

إذن ، $5738 = 13152_8$.

لتحويل الكسر العشري إلى كسر ثماني ، نستخدم نفس الطريقة التي اتبعناها لتحويل الكسر العشري إلى كسر ثنائي ، مع مراعاة استبدال الأساس 2 بالأساس 8 .

مثال (١,٣٠)

اكتب الكسر العشري 0.45 في النظام الثماني .

الحل

$$0.45 \times 8 = 0.60 + 3$$
$$0.60 \times 8 = 0.80 + 4$$
$$0.80 \times 8 = 0.40 + 6$$
$$0.40 \times 8 = 0.20 + 3$$
$$0.20 \times 8 = 0.60 + 1$$
$$0.60 \times 8 = 0.80 + 4$$

نتوقف الآن ويكون $0.45 = 0.34631_8$

(١,٣,٣) التحويل من النظام الثنائي إلى النظام الثماني
Binary to octal conversion

لكتابة عدد ثنائي في النظام الثماني، نقوم بتجميع أرقام العدد إلى مجموعات كل منها مكون من ثلاثة أرقام (لأن $8 = 2^3$) ثم نستخدم جدول (١,٣) لإتمام عملية التحويل. إذا كان عدد أرقام الجزء الصحيح من العدد لايقبل القسمة على 3 فإننا نضيف أصفاراً إلى أقصى يسار الجزء الصحيح، أما إذا كان عدد أرقام الجزء الكسري غير قابل للقسمة على 3 فإننا نضيف أصفاراً إلى أقصى يمين الجزء الكسري للعدد. سنوضح هذه الطريقة ببعض الأمثلة.

جدول (١,٣)

عدد ثنائي	عدد ثماني
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

مثال (١,٣١)

اكتب العدد 1001100010_2 في النظام الثماني.

الحل

$$1001100010_2 = 001 \quad 001 \quad 100 \quad 010_2$$
$$= 1 \quad 1 \quad 4 \quad 2$$
$$= 1142_8$$

مثال (١,٣٢)

اكتب العدد 111010011_2 في النظام الثماني .

الحل

$$111010011_2 = 723_8$$

مثال (١,٣٣)

حول العدد 11010.1100110_2 إلى عدد ثماني .

الحل

$$11010.1100110_2 = 011010.110011000_2$$
$$= 32.630_8$$

(١,٣,٤) التحويل من النظام الثماني إلى النظام الثنائي
Octal to binary conversion

إن تحويل عدد من النظام الثماني إلى النظام الثنائي هو عملية عكسية تماما لتحويل عدد من نظام ثنائي إلى نظام ثماني حيث نقوم بتبديل كل رقم ثماني بما يقابله في النظام الثنائي .

مثال (١,٣٤)

حول العدد 5703_8 إلى النظام الثنائي .

الحل

$$5703_8 = 101111000011_2 .$$

مثال (١,٣٥)

اكتب العدد 62.53_8 في النظام الثنائي.

الحل

$62.53_8 = 110010.101011_2$.

(١,٣,٥) العمليات الحسابية في النظام الثماني

Arithmetic in octal system

لإجراء العمليات الحسابية في النظام الثماني، نستخدم نفس الطرق التي اتبعناها في النظام الثنائي وسنوضح ذلك ببعض الأمثلة.

مثال (١,٣٦)

اجمع $4506_8 + 3675_8$

الحل

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & ① & ① & ① & \\
 & & 4 & 5 & 0 & 6 \\
+ & & 3 & 6 & 7 & 5 \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3
\end{array}
$$

التعليل :

$6 + 5 = 11 = 13_8$ نكتب 3 ونحمل 1.

$1+0 + 7 = 8 = 10_8$ نكتب 0 ونحمل 1.

$1+5+6 = 12 = 14_8$ نكتب 4 ونحمل 1.

$1+4+3 = 8 = 10_8$ نكتب 10.

إذن، $4506_8 + 3675_8 = 10403_8$.

مثال (١,٣٧)

اجمع $1127_8 + 3325_8 + 503_8$.

الحل

	(1)		(1)	
	1	1	2	7
	3	3	2	5
+		5	0	3
	5	1	5	7

التعليل :

$7 + 5 + 3 = 15 = 17_8$. نكتب 7 ونحمل 1 .

$1 + 2 + 2 + 0 = 5 = 5_8$. نكتب 5 .

$1 + 3 + 5 = 9 = 11_8$. نكتب 1 ونحمل 1 .

$1 + 1 + 3 = 5 = 5_8$. نكتب 5 .

إذن، $1127_8 + 3325_8 + 503_8 = 5157_8$.

مثال (١,٣٨)

استخدم الخوارزمية (١,٢) لإيجاد حاصل الطرح $15324_8 - 7645_8$.

الحل

متمم السبعات للعدد 07645_8 هو 70132_8 .

الآن :

```
    15324
+   70132
---------
  105456
      +1
---------
   05457
```

إذن، $15324_8 - 7645_8 = 5457_8$.

مثال (١,٣٩)

استخدم خوارزمية (١,٣) لإيجاد حاصل الطرح $7645_8 - 15324_8$.

الحل

متمم الثمانيات للعدد 15324_8 هو $62454_8 = 1 + 62453$. الآن :

```
     (1) (1) (1)
      7   6   4  5
+  6  2   4   5  4
------------------
   7  2   3   2  1
```

الآن نجد متمم الثمانيات للعدد 72321 فنجد أن هذا المتمم هو 05457 .

إذن، $7645_8 - 15324_8 = -5457_8$.

مثال (١,٤٠)

جد حاصل الضرب $341_8 \times 27_8$.

الحل

$$\begin{array}{rrrrr} & \textcircled{1} & & & \\ & \textcircled{3} & & & \\ & & 3 & 4 & 1 \\ \times & & & 2 & 7 \\ \hline & 3 & 0 & 4 & 7 \\ + & 7 & 0 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 6 & 7 \end{array}$$

التعليل :

$7 \times 1 = 7 = 7_8$. نكتب 7 .

$7 \times 4 = 28 = 34_8$. نكتب 4 ونحمل 3 .

$7 \times 3 + 3 = 24 = 30_8$. نكتب 30 .

$2 \times 1 = 2 = 2_8$. نكتب 2 .

$2 \times 4 = 8 = 10_8$. نكتب 0 ونحمل 1 .

$2 \times 3 + 1 = 7 = 7_8$. نكتب 7 .

إذن، $341_8 \times 27_8 = 12067_8$.

مثال (١,٤١)

اقسم $14603_8 \div 25_8$.

الحل

```
          4 6 7
     ______________
25 |  1 4 6 0 3
     -1 2 4
     ______________
        2 2 0
      - 1 7 6
     ______________
          2 2 3
        - 2 2 3
     ______________
          0 0 0
```

إذن، $14603_8 \div 25_8 = 467_8$.

تمارين (١,٣)

في كل التمارين من ١ إلى ١٢ حوّل إلى النظام العشري.

(١) 502_8 (٢) 135_8 (٣) 575_8

(٤) 602_8 (٥) 572_8 (٦) $1\,0\,0\,7_8$

(٧) 4641_8 (٨) 0.24_8 (٩) 5.55_8

(١٠) 203.71_8 (١١) 105.105_8 (١٢) 117.3_8

(١٣) حول كل عدد في التمارين من ١ إلى ١٢ إلى عدد ثنائي.

في كل التمارين من ١٤ إلى ١٩ حوّل إلى عدد ثماني :

(١٤) 525 (١٥) 652 (١٦) 726

(١٧) 9205 (١٨) 8001 (١٩) 9999

في كل التمارين من ٢٠ إلى ٢٥ حوِّل إلى عدد ثماني .

(٢٠) 100101_2 (٢١) 100111_2 (٢٢) 1000001_2

(٢٣) 111100.001_2 (٢٤) 11101.11_2 (٢٥) 11100.0001_2

في كل التمارين من ٢٦ إلى ٤٠ أجر العملية الحسابية :

(٢٦) $3502_8 + 1243_8$ (٢٧) $43324_8 + 2015_8$

(٢٨) $3016_8 + 2441_8 + 7033_8$ (٢٩) $3433_8 + 5007_8 + 7024_8$

(٣٠) $5762_8 - 3231_8$ (٣١) $4204_8 - 3131_8$

(٣٢) $2417_8 - 23506_8$ (٣٣) $1667_8 - 4006_8$

(٣٤) $632_8 \times 42_8$ (٣٥) $352_8 \times 52_8$

(٣٦) $467_8 \times 660_8$ (٣٧) $254_8 \times 123_8 \times 107_8$

(٣٨) $5043_8 \div 24_8$ (٣٩) $14504_8 \div 35_8$

(٤٠) $5043_8 \div 24_8$.

(١,٤) النظام الستة عشري
The Hexadecimal Number System

إن عدد أرقام هذا النظام هو ستة عشر رقمًا (أي أن أساسه 16) وهذه الأرقام : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F ، حيث إن A, B, C, D, E, F هي على الترتيب 10, 11, 12, 13, 14, 15, في النظام العشري .

سنستخدم الدليل الأدنى 16 ليدلنا على أن العدد مكتوب في النظام الستة عشري .

(١,٤,١) التحويل من النظام الستة عشري إلى النظام العشري.
Hexadecimal to decimal conversion

للتحويل من النظام الستة عشري إلى النظام العشري، نستخدم الشكل المنشور للعدد ونوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (١,٤٢)

حول العدد $D30C_{16}$ إلى عدد عشري.

الحل

$$D30C_{16} = 13 \times 16^3 + 3 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 12 \times 16^0$$
$$= 13 \times 4096 + 3 \times 256 + 0 + 12$$
$$= 53248 + 768 + 12$$
$$= 54028$$

(٢,٤,١) التحويل من النظام العشري إلى النظام الستة عشري
Decimal to hexadecimal conversion

لتحويل الأعداد من النظام العشري إلى النظام الستة عشري، نستخدم خوارزمية (١,١) مع مراعاة القسمة على 16 بدلا من القسمة على 2.

مثال (١,٤٣)

اكتب العدد العشري 5738 في النظام الستة عشري.

الحل

$$5738 = 16 \times 358 + A$$
$$358 = 16 \times 22 + 6$$

$$22 = 16 \times 1 + 6$$
$$1 = 16 \times 0 + 1$$

إذن ، $5738 = 166A_{16}$.

لتحويل الكسور العشرية إلى كسور في النظام الستة عشري، نستخدم الطريقة التي اتبعناها في تحويل الكسر العشري إلى كسر ثنائي مع مراعاة استبدال الأساس 2 بالأساس 16.

مثال (١,٤٤)

حول الكسر العشري 0.45 إلى كسر ستة عشري.

الحل

$$0.45 \times 16 = 0.20 + 7$$
$$0.20 \times 16 = 0.20 + 3$$
$$0.20 \times 16 = 0.20 + 3$$

نتوقف هنا ويكون $0.45 = 0.733_{16}$.

(١,٤,٣) التحويل من النظام الثنائي إلى النظام الستة عشري

Binary to hexadecimal conversion

لكتابة العدد الثنائي في النظام الستة عشري نقوم بتجميع أرقام العدد إلى مجموعات كل مجموعة مكونة من أربعة أرقام (لأن $16=2^4$) ونستخدم جدول (١,٤) مع مراعاة إضافة أي عدد من الأصفار عندما تستدعي الحاجة ذلك.

جدول (١,٤)

عدد ستة عشري	عدد ثنائي
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

مثال (١,٤٥)

حول العدد 1100111101_2 إلى النظام الستة عشري.

الحل

$$1110110111001000.10001111_2 = EDC8.8F_{16}$$

(١,٤,٤) التحويل من النظام الستة عشري إلى النظام الثنائي
Hexadecimal to binary conversion

نستخدم جدول (١,٤) لهذا الغرض.

مثال (١,٤٦)

حول العدد $F\,7_{16}$ إلى عدد ثنائي.

الحل

$F\,7_{16} = 11110111_2$.

مثال (١,٤٧)

اكتب العدد $3\,C\,.\,48_{16}$ في النظام الثنائي.

الحل

$3C.48_{16} = 00111100.01001000_2$.

ملاحظة

لتحويل عدد من النظام الثماني إلى النظام الستة عشري أو من النظام الستة عشري إلى النظام الثماني، نقوم بتحويل العدد إلى عدد عشري (أو عدد ثنائي) ومن ثم، نقوم بتحويل العدد الأخير إلى الأساس المطلوب.

مثال (١,٤٨)

اكتب العدد 735_8 في النظام الستة عشري.

الحل

$735_8 = 111011101_2 = 000111011101_2 = 1DD_{16}$.

(٥,٤,١) العمليات الحسابية في النظام الستة عشري
Arithmetic in hexadecimal system

لإجراء العمليات الحسابية الأساسية في النظام الستة عشري، نستخدم نفس الطرق التي اتبعناها في النظام الثنائي وسنوضح ذلك ببعض الأمثلة.

مثال (١,٤٩)

اجمع $4C3A_{16} + 8BAD_{16}$.

الحل

$$\begin{array}{ccccc} & ① & & ① & \\ & 4 & C & 3 & A \\ + & 8 & B & A & D \\ \hline & D & 7 & E & 7 \end{array}$$

التعليل :

$A + D = 23 = 17_{16}$. نكتب 7 ونحمل 1.

$1 + 3 + A = 14 = E_{16}$. نكتب E.

$C + B = 23 = 17_{16}$. نكتب 7 ونحمل 1.

$1 + 4 + 8 = 13 = D_{16}$. نكتب D.

إذن $4C3A_{16} + 8BAD_{16} = D7E7_{16}$.

مثال (١,٥٠)

اجمع $4C3A_{16} + 8BAD_{16} + D7E7_{16}$.

الحل

	(1)	(1)	(1)	
	4	C	3	A
	8	B	A	D
+	D	7	E	7
	1 A	F	C	E

التعليل :

$A + D + 7 = 30 = 1E_{16}$. نكتب E ونحمل 1 .

$1 + 3 + A + E = 28 = 1\,C_{16}$. نكتب C ونحمل 1 .

$1 + C + B + 7 = 31 = 1\,F_{16}$. نكتب F ونحمل 1 .

$1 + 4 + 8 + D = 26 = 1\,A_{16}$. نكتب 1 A .

إذن، $4C3\,A_{16} + 8BAD_{16} + D7E7_{16} = 1AFCE_{16}$.

مثال (١,٥١)

استخدم خوارزمية (١,٢) لإيجاد حاصل الطرح $ABCD_{16} - 1EFF_{16}$.

الحل

متمم الخمسة عشر للعدد $1EFF_{16}$ هو $E100_{16}$.

الآن :

```
      A B C D
      E I O O
   ----------
 + 1  8 C C D
      └▶  + 1
   ----------
      8 C C E
```

إذن ، $ABCD_{16} - 1EFF_{16} = 8CCE_{16}$

مثال (١,٥٢)

استخدم خوارزمية (١,٣) لإيجاد حاصل الطرح $90E8_{16} - 14F95_{16}$

الحل

متمم الستة عشر للعدد $14F95_{16}$ هو $EB06A_{16} + 1 = EB06B_{16}$.

الآن :

$$
\begin{array}{r}
9\ 0\ E\ 8 \\
+\ E\ B\ 0\ 6\ B \\
\hline
F\ 4\ 1\ 5\ 3
\end{array}
$$

متمم الستة عشر للعدد $F4153_{16}$ هو $0BEAC + 1 = BEAD_{16}$.

إذن ، $90E8_{16} - 14F95_{16} = - BEAD_{16}$.

مثال (١,٥٣)

جد حاصل الضرب $D3_{16} \times 8A_{16}$.

الحل

$$
\begin{array}{r}
\textcircled{1} \\
\textcircled{1} \\
D\ 3 \\
\times\ 8\ A \\
\hline
8\ 3\ E \\
+\ 6\ 9\ 8\ \ \\
\hline
7\ 1\ B\ E
\end{array}
$$

التعليل :

$A \times 3 = 30 = 1E_{16}$. نكتب E ونحمل 1 .

$A \times D + 1 = 131 = 83_{16}$. نكتب 83 .

$8 \times 3 = 24 = 18_{16}$. نكتب 8 ونحمل 1 .

$8 \times D + 1 = 105 = 69_{16}$. نكتب 69 .

إذن، $D3_{16} \times 8A_{16} = 71BE_{16}$.

مثال (١,٥٤)

اقسم $C5C1_{16} \div 4B_{16}$.

الحل

```
            2 A 3
     4B  |  C 5 C 1
         -  9 6
            2 F C
          - 2 E E
                E 1
          -     E 1
                0 0
```

إذن، $C5C1_{16} \div 4B_{16} = 2A3_{16}$.

تمارين (١,٤)

في التمارين من ١ إلى ١٩ حول العدد إلى

(أ) عدد ثنائي	(ب) عدد ثماني	(جـ) عدد عشري
(١) $A13_{16}$	(٢) $A9B_{16}$	(٣) $21E_{16}$
(٤) $100A_{16}$	(٥) $EBFF_{16}$	(٦) $A03B_{16}$
(٧) $42A1B_{16}$	(٨) $ABCDE_{16}$	(٩) $AEF94_{16}$

في التمارين من ١٠ إلى ١٨ اكتب العدد العشري في النظام الستة عشري .

(١٠) 87	(١١) 94	(١٢) 99
(١٣) 611	(١٤) 728	(١٥) 839
(١٦) 5123	(١٧) 9876	(١٨) 6789

في التمارين من ١٩ إلى ٢٧ حوّل العدد الثنائي إلى :

(أ) عدد عشري	(ب) عدد ثماني	(جـ) عدد ستة عشري
(١٩) 10010_2	(٢٠) 1111_2	(٢١) 1000001_2
(٢٢) 1011011_2	(٢٣) 1110110_2	(٢٤) 11101111_2
(٢٥) 111100.001_2	(٢٦) 111110.11111_2	(٢٧) 111.11101_2

في التمارين من ٢٨ إلى ٤٠ أجر العملية الحسابية المعطاة :

(٢٨) $BC24_{16} + A157_{16}$	(٢٩) $4C98_{16} + ABB1_{16}$
(٣٠) $B2C4_{16} + FE34_{16} + 51D_{16}$	(٣١) $516B_{16} - 243_{16}$
(٣٢) $651C_{16} - 329_{16}$	(٣٣) $7238_{16} - 15CA_{16}$
(٣٤) $329_{16} - 51C_{16}$	(٣٥) $1EFF_{16} - ABCD_{16}$
(٣٦) $423_{16} - 51B6_{16}$	(٣٧) $716_{16} \times 3AB_{16}$
(٣٨) $B184_{16} \times 6AA_{16}$	(٣٩) $C606_{16} \div 4B_{16}$
(٤٠) $62AC_{16} \div 3C_{16}$.	

الفصل الثاني

المنطق الرياضي

MATHEMATICAL LOGIC

يعـرف المنطق بأنه الموضـوع الذي يقـوم بدراسـة طرق الاسـتنبـاط وبالتحديد، الطرق التي تفصل الاستنباط الصحيح عن الاستنباط الخاطىء. هناك كثير من النتائج في مختلف فروع المعرفة نستطيع الحصول عليها بوساطة الاستنباط. فعلى سبيل المثال، إن جميع المبرهنات في الأنظمة الرياضية تبرهن بوساطة قواعد المنطق، وفي علم الحاسوب نجد أن جميع الخوارزميات التي هي حجر الأساس في بناء البرامج تعتمد اعتماداً كلياً على قواعد المنطق.

سنقوم في هذا الفصل بدراسة مبسطة لنظامين منطقيين هما حساب التقارير (أو القضايا) وحساب المُسنَدات.

(٢,١) حساب التقارير(القضايا)

Sentential (Propositional) Calculus

يعدُّ حساب التقارير من أبسط الأنظمة المنطقية، وهو يستخدم لغة سهلة جدا تتكون مفرداتها من تقارير وأدوات ربط تستخدم لبناء تقارير جديدة من تقارير معروفة. وعلى الرغم من بساطة هذه اللغة، إلا أن لها تطبيقات مهمة جدا في الرياضيات والحاسوب.

تعريف (١,٢)

كل جملة تحمل أخبارًا ما ويمكن الحكم بأنها إما صائبة وإما خاطئة، ولا تكون صائبة وخاطئة في آن واحد تسمى تقريرًا. نقول إن التقرير بسيط إذا كان يحمل خبرًا واحدًا، أما إذا حمل التقرير خبرين فأكثر فإننا نسميه تقريرًا مركبًا. إذا كان التقرير صائبًا فإننا نقول إن قيمة صوابه هي T، أما إذا كان التقرير خاطئًا فاننا نقول إن قيمة صوابه هي F.

مثال (١,٢)

عين التقارير من بين الجمل الآتية وحدد قيمة صواب كل منها.

(١) العدد 48 عدد صحيح موجب.

(٢) العدد 48 يقسم العدد 55.

(٣) كم الساعة الآن ؟

(٤) القدس مدينة عربية.

(٥) ما أجمل هذا اليوم !

(٦) المجموعة الخالية مجموعة جزئية من أية مجموعة.

(٧) العدد 1101_2 عدد ثنائي.

الحل

جميع الجمل تقارير ماعدا الجملتين (٣)، (٥). التقارير (١)، (٤)، (٦)، (٧) صائبة، أما التقرير (٢) فهو خاطىء.

ملاحظات

(١) لنعتبر الجملة الخبرية: اليوم هو الجمعة. إذا كنا نتكلم في يوم جمعة فإنها

صائبة، أما إذا كنا نتكلم في يوم آخر فإنها خاطئة. سنعتبر هذه الجملة تقريراً وذلك بحساب قيمة صوابها وفق اليوم الذي نتكلم فيه.

(٢) لنعتبر الجملة الخبرية: $x + 1 < 0$. إن هذه الجملة صائبة لبعض قيم x وهي خاطئة لبعض القيم الأخرى، وبالتالي فإنها ليست تقريراً. نشير هنا إلى أن مثل هذه الجملة تسمى جملة مفتوحة (open sentence).

(٣) لنعتبر الجملة الخبرية: يقيم علي في الرياض. سنفهم من هذه الجملة أن عَلَيًّا المذكور هو شخص معيّن بالرغم من عدم ذكر اسمه كاملا. وبالتالي، فإننا نعتبر هذه الجملة تقريراً.

(١، ١، ٢) أدوات الربط (Connectives)

في هذا الكتاب، سوف نستخدم خمس أدوات، نسميها أدوات الربط، لكي نُكوِّن تقارير جديدة من تقارير معروفة. وهذه الأدوات ورموزها هي: و($\wedge$)، أو ($\vee$)، ليس صحيحا أن... ($\neg$)، إذا... فإن... ($\longrightarrow$)، ... إذا، وفقط إذا... ($\longleftrightarrow$).

إذا كان A وB تقريرين معينين فإننا نستخدم التسميات التالية:

(١) الجملة الخبرية $\neg A$ نسميها نفي A، وتُقرأ: نفي A، كما تقرأ: ليس صحيحا أن A.

(٢) الجملة الخبرية $A \wedge B$ نسميها عطف A وB، وتقرأ: A و B.

(٣) الجملة الخبرية $A \vee B$ نسميها فصل A وB، وتقرأ: A أو B.

(٤) الجملة الخبرية $A \longrightarrow B$ نسميها جملة شرطية، وتقرأ: إذا كان A فإن B.

(٥) الجملة الخبرية $A \longleftrightarrow B$ نسميها جملة ثنائية الشرط، وتقرأ: A إذا، وفقط إذا B.

تعريف (٢,٢)

لتكن $x_1, x_2, ... x_n$ مجموعة متغيرات تقريرية، (أي يمكن التعويض عن كل منها بأي تقرير). نعرف العبارات التقريرية في $x_1, ..., x_n$ كمايلي:

(i) $x_1, x_2 ..., x_n$ *عبارات تقريرية.*

(ii) *إذا كانت P و Q عبارتين تقريريتين في $x_1, ..., x_n$ فإن $(\neg P), (P \vee Q), (P \wedge Q), (P \longrightarrow Q), (P \longleftrightarrow Q)$ عبارات تقريرية في $x_1, ..., x_n$.*

(iii) *إن أية عبارة لم نحصل عليها بوساطة (i) أو (ii) لاتعتبر عبارة تقريرية في $x_1, ..., x_n$.*

نقول إن P عبارة تقريرية إذا كانت عبارة تقريرية في مجموعة ما من المتغيرات التقريرية.

إذا كانت $P(x_1, ..., x_n)$ عبارة تقريرية في $x_1, ..., x_n$ وكانت $p_1, ..., p_n$ تقاريراً فان $P(p_1, ..., p_n)$ جملة خبرية. نريد أن نعتبر $P(p_1, ..., p_n)$ تقريراً. لذلك، يجب علينا أن نحدد قيمة صواب $P(p_1, ..., p_n)$. سوف نجعل قيمة صواب $P(p_1, ..., p_n)$ تعتمد فقط على قيم صواب $p_1, ..., p_n$ وعلى أدوات الربط؛ ولتقديم ذلك بشكل موجز وشامل فإننا سنستعمل جداول الصواب (truth tables). إن جدول الصواب للعبارة $P(x_1, ..., x_n)$ هو جدول يعرض قيم الصواب المقابلة لجميع

التركيبات الممكنة لقيم صواب التقارير التي يمكن تعويضها عن x_n ,... , x_1 . ومن أجل إنشاء جداول الصواب المختلفة فإننا نحتاج فقط ، إلى تعريف جداول الصواب للعبارات التقريرية التالية :

$\neg x$, $x \vee y$, $x \wedge y$, $x \longrightarrow y$, $x \longleftrightarrow y$ حيث x و y متغيران تقريريان . وهذه الجداول تعرف أيضًا بجداول الصواب لأدوات الربط $\longleftrightarrow$, $\longrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$.

تعريف (٢,٣)

ليكن p متغيرًا تقريريًا . نعرف جدول الصواب للعبارة التقريرية $\neg p$ كما يلي :

جدول (٢,١)

p	$\neg p$
T	F
F	T

إن هذا الجدول يفيد أنه إذا عوضنا عن p بتقرير صائب A فإن الجملة الخبرية الناتجة $\neg A$ تعتبر بالتعريف تقريرًا خاطئًا ؛ أما إذا عوضنا عن p بتقرير خاطىء B فإن الجملة الخبرية الناتجة $\neg B$ تعتبر بالتعريف تقريرًا صائبًا .

تعريف (٢,٤)

ليكن p , q متغيرين تقريريين . نعرف جدول الصواب للعبارة التقريرية $p \wedge q$ كما يلي :

جدول (٢,٢)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

تعريف (٢,٥)

ليكن p , q متغيرين تقريريين . نعرف جدول الصواب للعبارة التقريرية $p \vee q$ كما يلي:

جدول (٢,٣)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

تعريف (٢,٦)

ليكن p, q متغيرين تقريريين . نعرف جدول الصواب للعبارة التقريرية $p \longrightarrow q$ كمايلي:

جدول (٢,٤)

p	q	$p \longrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تعريف (٢,٧)

ليكن p , q متغيرين تقريريين. نعرف جدول الصواب للعبارة التقريرية $q \longleftrightarrow p$ كما يلي:

جدول (٢,٥)

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ملاحظة

إذا كانت $P(x_1 , ..., x_n)$ عبارة تقريرية فإننا نستطيع أن نكوّن جدول صوابها وذلك بالاستناد إلى جداول الصواب المعرفة أعلاه. إذن، إذا كانت $p_1 , ..., p_n$ تقاريراً فإن الجملة الخبرية $P(p_1 , ..., p_n)$ تقرير لأننا نستطيع أن نجد قيمة صوابها من جدول الصواب للعبارة $P(x_1 , ..., x_n)$. على وجه التخصيص، إن كلا من $\neg p_1$، $p_1 \vee p_2$، $p_1 \wedge p_2$، $p_1 \longrightarrow p_2$، $p_1 \longleftrightarrow p_2$ تقرير.

تعريف (٢,٨)

لتكن $A(q_1, ..., q_m)$ جملة خبرية مكونة عن طريق استخدام التقارير البسيطة $q_1, ..., q_m$ وأدوات الربط. إذا استبدلنا $q_i\ (i=1, ..., m)$ بمتغيرات تقريرية $y_i\ (i=1, ..., m)$ فإننا نحصل على عبارة تقريرية $A(y_1, ..., y_m)$. نسمي $A(y_1, ..., y_m)$ العبارة التقريرية في $y_1, ..., y_m$ المحدثة بوساطة، أو اختصاراً، عبارة $A(q_1, ..., q_m)$.

ملاحظات

(١) إذا استخدمنا الرموز المذكورة في تعريف (٢,٨) فإن ($A(q_1, \ldots, q_m)$ تقرير لأننا نستطيع أن نجد قيمة صوابها من جدول الصواب للعبارة ($A(y_1, \ldots, y_m)$.

(٢) عند تكوين العبارات المحدثة ، فإننا نستبدل كل تقرير بمتغير ولايجـــــوز أن نستبدل تقريرين مختلفين بنفس المتغير .

مثال (٢,٢)

عبر عن كل من التقارير التالية بصورة رمزية .

(١) السماء ممطرة أو الطقس بارد .

(٢) إما أن السماء ممطرة أو أن الطقس حار .

(٣) ليست السماء ممطرة ولا الطقس بارداً .

(٤) السماء ممطرة أوالطقس بارد ولكن ليس كلاهما .

(٥) السماء ليست ممطرة إذا كان الطقس بارداً .

الحل

لنرمز للتقرير « السماء ممطرة » بالرمز A ، وللتقرير « الطقس بارد » بالرمز B .

عندئذ :

(١) $A \vee B$.

(٢) $A \vee \neg B$.

(٣) $\neg A \wedge \neg B$.

(٤) $(A \vee B) \wedge (\neg (A \wedge B))$.

(٥) $B \longrightarrow \neg A$.

مثال (٢,٣)

عبر عن التقرير التالي بصورة رمزية.

إذا لم يُحضّر أحمد واجباته فإنه سوف يرسب في مقرر المنطق أو أنه سوف ينجح ولكن بتقدير منخفض.

الحل

لنرمز للتقرير « يحضر أحمد واجباته » بالرمز A، وللتقرير « يرسب أحمد في مقرر المنطق » بالرمز B، وللتقرير « تقدير أحمد منخفض» بالرمز C. عندئذ، نحصل على:

$$\neg A \longrightarrow B \vee (\neg B \wedge C).$$

ملاحظة

عندما نعبر عن التقارير بصورة رمزية فإنه يجوز لنا أن نغير كلمات التقرير شريطة عدم الإخلال بالمعنى ؛ على سبيل المثال، إن التقارير « 4 عدد زوجي » و« 4 عدد غير فردي » و« ليس صحيحاً أن 4 عدد فردي » تعبر عن معنى واحد.

مثال (٢,٤)

جد جدول الصواب للعبارة التقريرية التالية:

$$P = (p \wedge \neg r) \longrightarrow (p \longrightarrow q)$$

جدول (٢,٦)

p	q	r	$\neg r$	$p\wedge\neg r$	$p\longrightarrow q$	P
T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	T

لاحظ أن $P(p, q, r)$ عبارة تقريرية في ثلاثة متغيرات وأن جدول الصواب لها يحتوي على $8 (= 2^3)$ أسطر. من الجدير بالذكر أنه إذا كانت $Q(x_1, \ldots, x_n)$ عبارة تقريرية في $x_1, \ldots, x_n$ فإن جدول الصواب لها يحتوي على 2^n سطراً.

(٢,١,٢) التكافؤ المنطقي (Logical equivalence)

تعريف (٢,٩)

إذا كانت $P(x_1, \ldots, x_n)$ و $Q(x_1, \ldots, x_n)$ عبارتين تقريريتين فإننا نقول إنهما متكافئتان منطقيا إذا كان لهما نفس جدول الصواب، ويرمز لذلك بالرمز $P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, \ldots, x_n)$، ويُقرأ $P(x_1, \ldots, x_n)$ تكافىء منطقياً $Q(x_1, \ldots, x_n)$.

ليكن $A(p_1, \ldots, p_n)$ و $B(p_1, \ldots, p_n)$ تقريرين حيث $p_1, \ldots, p_n$ تقارير بسيطة. نقول إن $A(p_1, \ldots, p_n)$ و $B(p_1, \ldots, p_n)$ متكافئان منطقيًا إذا كانت عبارتاهما متكافئتين، ويرمز لذلك بالرمز

$A(p_1, \ldots, p_n) \equiv B(p_1, \ldots, p_n)$.

تعريف (٢,١٠)

ليكن $A \longrightarrow B$ تقريرا شرطيا.

(١) *يسمى التقرير* $B \longrightarrow A$ عكس *(converse)* $A \longrightarrow B$.

(٢) *يسمى التقرير* $(\neg B) \longrightarrow (\neg A)$ معاكس *(inverse)* $A \longrightarrow B$.

(٣) *يسمى التقرير* $(\neg B) \longrightarrow (\neg A)$ *المكافىء العكسي (contrapositive) للتقرير* $A \longrightarrow B$.

ملاحظة

يستطيع القارىء أن يتحقق من النتائج التالية بسهولة :

(١) $A \longrightarrow B \equiv (\neg B) \longrightarrow (\neg A)$

(٢) $A \longrightarrow B \equiv \neg A \vee B$

(٣) $A \longrightarrow B \not\equiv B \longrightarrow A$

(٤) $A \longrightarrow B \not\equiv (\neg A) \longrightarrow (\neg B)$

(٥) $A \longleftrightarrow B \equiv (A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$

(٦) $B \longleftrightarrow A \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

حيث $\not\equiv$ تقرأ « لايكافىء منطقياً ».

مثال (٢,٥)

على سبيل المثال، لإثبات (١)، نستبدل A , B بالمتغيرين q و p على الترتيب ونبرهن أن $p \longrightarrow q \equiv (\neg q) \longrightarrow (\neg p)$. ومن أجل الاختصار، فإننا نكوّن جدولا واحداً بدلا من جدولين منفصلين لكل من $p \longrightarrow q$ و $(\neg q) \longrightarrow (\neg p)$.

وهذا الجدول هو :

جدول (٢,٧)

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \longrightarrow q$	$(\neg q) \longrightarrow (\neg p)$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T

من الجدول، يتضح أن $p \longrightarrow q \equiv (\neg q) \longrightarrow (\neg p)$ وبالتالي فإن $A \longrightarrow B \equiv (\neg B) \longrightarrow (\neg A)$.

مثال (٢,٦)

أثبت أن العبارة التقريرية (pvq) ¬ تكافىء منطقيًا العبارة التقريرية (p ¬) ∧ (q ¬)

الحل

نكوّن الجدول التالي :

جدول (٢, ٨)

p	q	¬ p	¬ q	p ∨ q	¬ (pvq)	(¬ p) ∧ (¬ q)
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

(٣, ١, ٢) المصدوقات والتناقضات (Tautologies and contradictions)

تعريف (٢,١١)

إذا كانت $P(x_1, ..., x_n)$ عبارة تقريرية في $x_1, ..., x_n$ فإننا نسميها مصدوقة إذا حققت الشرط الآتي:

إذا كانت $p_1, ..., p_n$ أية تقارير فإن $P(p_1, ..., p_n)$ تقرير صائب . أي أن $P(x_1, ..., x_n)$ مصدوقة إذا كان العمود الأخير في جدول صوابها يحتوي على T فقط . سوف نستخدم الرمز t للتعبير عن مصدوقة ما .

إذا كان A تقريراً فإننا نقول إن A تقرير مصدوقي إذا كانت عبارته مصدوقة .

تعريف (٢,١٢)

إذا كانت $P(x_1, ..., x_n)$ عبارة تقريرية في $x_1, ..., x_n$ فإننا نسميها تناقضًا إذا حققت الشرط الآتي:

إذا كانت $p_1 , \dots , p_n$ أية تقارير فإن $P (p_1 , \dots , p_n)$ تقرير خاطىء، أي أن $P (x_1 , \dots , x_n)$ تناقض إذا كان العمود الأخير في جدول صوابها يحتوي على F فقط. سوف نستخدم الرمز C للتعبير عن تناقض ما.

إذا كان A تقريراً فإننا نقول إن A تقرير تناقضي إذا كانت عبارته تناقضاً.

مثال (٢,٧)

أثبت أن العبارة التقريرية $p \vee \neg p$ مصدوقة.

الحل

نكوّن جدول الصواب

جدول (٢,٩)

p	¬ p	p∨¬ p
T	F	T
F	T	T

واضح أن العمود الأخير يحتوي على T فقط.

مثال (٢,٨)

أثبت أن التقرير $(A \wedge \neg A) \longrightarrow B$ تقرير مصدوقي.

الحل

ليكن x و y متغيرين تقريريين. إذن، $(x \wedge \neg x) \longrightarrow y$ عبارة تقريرية لـ $(A \wedge \neg A) \longrightarrow B$. نكوّن جدول الصواب.

جدول (٢,١٠)

x	y	$\neg x$	$x \wedge \neg x$	$(x \wedge \neg x) \longrightarrow y$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

إذن، $(x \wedge \neg x) \longrightarrow y$ مصدوقة، وبالتالي فإن $(A \wedge \neg A) \longrightarrow B$ تقرير مصدوقي.

مثال (٢,٩)

أثبت أن العبارة التقريرية $P = \neg\left[(\neg(p \vee q)) \longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q\right]$ تناقض.

الحل

نكوّن جدول الصواب:

جدول (٢,١١)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$(\neg (p \vee q) \longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$	P
T	T	F	F	T	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	T	T	F

واضح أن العمود الأخير يحتوي على F فقط.

مثال (٢,١٠)

أثبت أن التقرير $A \wedge \neg A$ تقرير تناقضي.

الحل

ليكن x متغيراً تقريريًا. إذن، $x \wedge \neg x$ عبارة تقريرية لـ $A \wedge \neg A$. نكون جدول الصواب:

جدول (٢,١٢)

x	¬ x	x ∧ ¬ x
T	F	F
F	T	F

إذن، $x \wedge \neg x$ تناقض، وبالتالي، فإن $A \wedge \neg A$ تقرير تناقضي.

تعريف (٢,١٣)

إذا كانت $P(x_1, \dots, x_n)$ و $Q(x_1, \dots, x_n)$ عبارتين تقريريتين فإننا نقول إن $P(x_1, \dots, x_n)$ تقتضي منطقيا (logically implies) $Q(x_1, \dots, x_n)$ إذا كانت العبارة $P(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow Q(x_1, \dots, x_n)$ مصدوقة، ويرمز لذلك بالرمز $P(x_1, \dots, x_n) \models Q(x_1, \dots, x_n)$.

تعريف (٢,١٤)

إذا كان A و B تقريرين فإننا نقول إن A يقتضي منطقيًا B إذا كان $A \longrightarrow B$ تقريرًا مصدوقًا، ويرمز لذلك بالرمز $A \models B$.

مثال (٢,١١)

أثبت أن $A \models A \vee B$ حيث A و B تقريران.

الحل

نعتبر $A \longrightarrow (A \vee B)$. ليكن x و y متغيرين تقريريين.

نكوّن جدول الصواب للعبارة $x \longrightarrow (x \vee y)$:

جدول (٢,١٣)

x	y	x∨y	x⟶ (x∨y)
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

من الجدول يتبين أن $x \longrightarrow (x \vee y)$ مصدوقة، وبالتالي، فإن $A \longrightarrow (A \vee B)$ تقرير مصدوقي. إذن، $A \models A \vee B$.

مبرهنة (٢,١)

لتكن $P(x_1, \ldots, x_n)$ و $Q(x_1, \ldots, x_n)$ عبارتين تقريريتين. عندئذ $P \equiv Q$ إذا وفقط إذا $Q \longleftrightarrow P$ مصدوقة.

البرهان

لنفرض أن $P \equiv Q$. إذن، Q و P لهما نفس جدول الصواب. بالاستناد إلى جدول صواب أداة الربط ⟷ ، نجد أن العمود الأخير في جدول صواب $Q \longleftrightarrow P$ يحتوي على T فقط. وبالتالي، فإن $Q \longleftrightarrow P$ مصدوقة.

وبالعكس، إذا كانت $Q \longleftrightarrow P$ مصدوقة فإن العمود الأخير في جدول صوابها يحتوي على T فقط. إذن، بالاستناد إلى تعريف جدول صواب ⟷، نجد أن Q و P لهما نفس جدول الصواب، وبالتالي، فإن $P \equiv Q$. Δ

مبرهنة (٢,٢) (مبدأ التعويض للمصدوقات)

لتكن $P(x_1, ..., x_n)$ مصدوقة ولتكن $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ أية عبارات تقريرية. عندئذ $P(Q_1, ..., Q_n)$ مصدوقة، حيث $P(Q_1, ..., Q_n)$ هي العبارة التقريرية الناتجة من $P(x_1, ..., x_n)$ عن طريق استبدال $x_1, ..., x_n$ بالعبارات $Q_1, ..., Q_n$ على الترتيب.

البرهان

إن جدول صواب $P(x_1, ..., x_n)$ لا يعتمد على التقارير التي نعوضها عن $x_1, ..., x_n$ لأن العمود الأخير في ذلك الجدول يحتوي على T فقط. لنفرض أن $Q_1, ..., Q_n$ عبارات تقريرية في $y_1, ..., y_m$. إذا كانت $A_1, ..., A_n$ تقاريراً فإن $Q_1(A_1, ..., A_m), ..., Q_n(A_1, ..., A_m)$ تقارير. إذن، إذا عوضنا عن $x_1, ..., x_n$ بالتقارير $Q_1(A_1, ..., A_m), ..., Q_n(A_1, ..., A_m)$ على الترتيب فإن $P(Q_1(A_1, ..., A_m), ..., Q_n(A_1, ..., A_m))$ تقرير صائب لأن $P(x_1, ..., x_n)$ مصدوقة. إذن، $P(Q_1, ..., Q_n)$ مصدوقة. Δ

مبرهنة (٢,٣) (مبدأ التعويض للتكافؤ المنطقي)

لتكن $P(x_1, ..., x_n), Q(x_1, ..., x_n)$ عبارتين تقريريتين، ولتكن $R_1, ..., R_n$ أية عبارات تقريرية. عندئذ، إذا كانت $P(x_1, ..., x_n) \equiv Q(x_1, ..., x_n)$ فإن $P(R_1, ..., R_n) \equiv Q(R_1, ..., R_n)$.

البرهان

بما أن $P(x_1, ..., x_n) \equiv Q(x_1, ..., x_n)$ فإن $P(x_1, ..., x_n) \longleftrightarrow Q(x_1, ..., x_n)$ مصدوقة. إذن، بالاستناد إلى المبرهنة (٢,٢)، نجد أن $P(R_1, ..., R_n) \longleftrightarrow Q(R_1, ..., R_n)$ مصدوقة. وبالتالي فإن $P(R_1, ..., R_n) \equiv Q(R_1, ..., R_n)$. Δ

ملاحظة

في المبرهنتين السابقتين، من الممكن أن نترك بعض المتغيرات x_j كما هي وذلك بأن نختار $Q_j = x_j$ أو $R_j = x_j$.

مثال (٢,١٢)

أثبت أن

$$\neg[(p \vee (q \wedge r)) \vee (s \wedge u)] \equiv \neg(p \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(s \wedge u).$$

الحل

نعلم أن $\neg(x \vee y) \equiv (\neg x) \wedge (\neg y)$. إذا استبدلنا x و y بالعبارات $p \vee (q \wedge r), s \wedge u$ على الترتيب فإننا نحصل على المطلوب باستخدام مبدأ التعويض للتكافؤ المنطقي.

المبرهنة التالية تعطينا بعض الخواص لأدوات الربط، ويمكن إثبات كل تكافؤ منطقي مذكور في نص المبرهنة بسهولة عن طريق جداول الصواب.

مبرهنة (٢,٤)

إذا كانت p, q, r متغيرات تقريرية، t مصدوقة، و c تناقضا فإن:

(١) قانوني الابدال:

$$p \vee q \equiv q \vee p \quad , \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

(٢) قانوني التجميع:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad , \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

(٣) قانوني التوزيع:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

(٤) قوانين c و t :

$$p\vee t\equiv t\ ,\ p\wedge t\equiv p\ ,\ p\vee c\equiv p\ ،\ p\wedge c\equiv c$$

(٥) قوانين النفي :

$$\neg c\equiv t\ ,\ \neg t\equiv c\ ,\ \neg(\neg p)\equiv p\ ,\ p\vee\neg p\equiv t\ ,\ p\wedge\neg p\equiv c$$

(٦) قانوني الجمود :

$$p\wedge p\equiv p\ ,\ p\vee p\equiv p$$

(٧) قانوني ديمورجان :

$$\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)\ ،\ \neg(p\wedge q)\equiv(\neg p)\vee(\neg q)$$

(٨) قانوني الامتصاص :

$$p\wedge(p\vee q)\equiv p\ ،\ p\vee(p\wedge q)\equiv p$$

ملاحظة

من الممكن استخدام مبرهنة (٢,٤) لإثبات التكافؤ المنطقي لعبارتين تقريريتين بدلا من استخدام جداول الصواب . سنوضح ذلك في المثال ال الي :

مثال (٢,١٣)

أثبت أن $(p\wedge\neg q\wedge.)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(q\wedge r)\equiv r$

الحل

$$\begin{aligned}(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(q\wedge r) &\equiv ((p\vee\neg p)\wedge(\neg q\wedge r))\vee(q\wedge r)\\ &\equiv (t\wedge(\neg q\wedge r))\vee(q\wedge r)\\ &\equiv (\neg q\wedge r)\vee(q\wedge r)\\ &\equiv (\neg q\vee q)\wedge r\\ &\equiv t\wedge r\\ &\equiv r\end{aligned}$$

تمارين (١,٢)

(١) عبر عن كل من التقارير التالية بصورة رمزية.

(أ) حضر أحمد محاضرات المنطق ولكن محمداً لم يحضرها.

(ب) سوف يجتاز أحمد مقرر المنطق إذا درس جيداً.

(جـ) سوف يرسب وسيم في مقرر المنطق إذا لم يقدم واجباته ويدرس جيدا.

(د) إذا كان مقرر المنطق صعبًا فإن وسيمًا وخالداً سيجتازان المقرر إذا وفقط إذا اجتهدا.

(٢) جد العكس والمعاكس والمكافىء العكسي لكل من التقارير التالية:

(أ) إذا لم يستطع علي أن يقول كلمة حق فليصمت.

(ب) إذا تخرج عمر من جامعة الملك سعود وأراد متابعة دراسته العليا فإنه لن يتخصص في الرياضيات.

(جـ) إذا كان اليوم هو الخميس فإن عليًا سيزور والديه.

(٣) جد جدول الصواب لكل من العبارات التقريرية التالية:

(أ) $p \longrightarrow (\neg q \longrightarrow r)$

(ب) $p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$

(جـ) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow r$

(د) $(p \wedge (q \vee p)) \longrightarrow p$

(هـ) $(\neg p \wedge \neg q) \longleftrightarrow \neg (p \vee q)$

(و) $(s \vee \neg (p \wedge (q \longleftrightarrow r))) \longrightarrow (r \wedge \neg s)$

في التمارين من ٤ إلى ١٣ أثبت أن العبارة التقريرية المعطاة مصدوقة :

(٤) $(\neg p \vee q) \longleftrightarrow (p \longrightarrow (p \wedge q))$

(٥) $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow q$

(٦) $(\neg q \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow \neg p$

(٧) $(\neg q \wedge (p \vee q)) \longrightarrow p$

(٨) $p \longrightarrow (q \longrightarrow (p \wedge q))$

(٩) $((p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)) \longrightarrow (p \longrightarrow (q \wedge r))$

(١٠) $((p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$

(١١) $((p \longrightarrow q) \wedge (\neg p \longrightarrow q)) \longrightarrow q$

(١٢) $(p \longrightarrow (q \wedge \neg q)) \longrightarrow \neg p$

(١٣) $(p \wedge \neg p) \longrightarrow q$

في التمارين من ١٤ إلى ١٧ ، أثبت أن العبارة التقريرية المعطاة تناقض .

(١٤) $(p \wedge q) \wedge \neg (p \vee q)$

(١٥) $(p \longrightarrow q) \wedge ((\neg q) \wedge p)$

(١٦) $(p \wedge \neg (q \longrightarrow (p \wedge q)))$

(١٧) $(r \wedge \neg r) \longrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q))$

(١٨) أثبت أن $r \longrightarrow (p \vee q) \equiv (p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)$.

(١٩) أثبت أن $(q \vee r) \longrightarrow p \equiv (\neg p \vee r) \longrightarrow \neg q$

(٢٠) أثبت أن $(p \longrightarrow \neg q) \wedge (p \longrightarrow \neg r) \equiv \neg (p \wedge (q \vee r))$

(٢١) أثبت أن $p \longleftrightarrow (p \wedge q) \equiv q \longrightarrow p$.

(٢٢) أثبت أن $(p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow \neg q) \equiv \neg p$.

لتكن S مجموعة من أدوات الربط . نقول إن S تامة إذا تحقق الشرط الآتي : كل عبارة تقريرية تكافىء منطقيًا عبارة تقريرية مكونة باستخدام أدوات ربط من S فقط .

في التمارين من ٢٣ إلى ٢٧ ، أثبت أن كل مجموعة معطاة مجموعة تامة .

(٢٣) $\{\neg, \vee\}$ (٢٤) $\{\neg, \wedge\}$ (٢٥) $\{\neg, \longrightarrow\}$

(٢٦) $\{*, \circ\}$ حيث * و o معرفة كما في الجدول (٢, ١٤)

جدول (٢,١٤)

p	q	p * q	p o q
T	T	F	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	T

(٢٧) $\{\oplus, \longleftrightarrow, \wedge\}$ حيث $\oplus$ معرفة كما في الجدول(٢,١٥)

جدول (٢,١٥)

p	q	p ⊕ q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

في التمارين من ٢٨ إلى ٣٣ بيّن ما إذا كان

(i) (ب) $\models$ (أ) ، (ii) (أ) $\models$ (ب) ، (iii) (ب) $\equiv$ (أ) .

(٢٨) (أ) $p \longrightarrow (q \longrightarrow \neg r)$

(ب) $p \longrightarrow (\neg q \longrightarrow r)$

(٢٩) (أ) $(p \wedge q) \wedge \neg r$ (ب) $r \longrightarrow (q \longrightarrow p)$

(٣٠) (أ) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$ (ب) $r \wedge \neg r$

(٣١) (أ) $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r$ (ب) $p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r)$

(٣٢) (أ) $(p \longrightarrow q) \vee r$ (ب) $(p \longleftrightarrow q) \wedge r$

(٣٣) (أ) $(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \wedge r)$ (ب) $(\neg q \vee r \vee ((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$

في التمارين من ٣٤ إلى ٣٦ استخدم مبرهنة (٢,٢) لإثبات أن العبارات التقريرية المعطاة مصدوقات.

(٣٤) $((p \vee q) \vee (r \wedge s)) \longleftrightarrow ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee s))$.

(٣٥) $(\neg p \wedge (\neg p \longrightarrow (q \vee r))) \longrightarrow (q \vee r)$.

(٣٦) $((p \wedge q \wedge r) \longrightarrow (s \wedge \neg s)) \longrightarrow \neg (p \wedge q \wedge r)$.

في التمارين من ٣٧ إلى ٣٩ استخدم مبرهنة (٢,٣) لإثبات أن كل زوج من العبارات التقريرية المعطاة متكافىء منطقيًا.

(٣٧) $\neg ((p \longleftrightarrow q) \vee (p \wedge \neg q))$ ، $(\neg (p \longleftrightarrow q)) \wedge \neg (p \wedge \neg q)$

(٣٨) $(r \wedge \neg p) \wedge ((r \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q))$ ، $r \wedge \neg p$

(٣٩) $(p \vee q) \longrightarrow (p \wedge q)$ ، $((p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)) \longrightarrow \neg (p \vee q)$

(٢,٢) الحُجـــج
Arguments

عرفنا في البند (١ , ٢) ماذا نعني بقولنا إن التقرير A يقتضي منطقيـًا التقرير B. سنعطي الآن تعميمًا لهذا المفهوم.

تعريف (٢,١٥)

إذا كانت $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ عبارات تقريرية في $x_1, \ldots, x_m$ فإننا نقول إن العبارات $P_1, \ldots, P_n$ تقتضي منطقيًا العبارة Q إذا كان $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \models Q$.

تعريف (٢,١٦)

نقول إن التقارير $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تقتضي منطقيًا التقرير B إذا كان $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \models B$.

مبرهنة (٢,٥)

لتكن $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ عبارات تقريرية في $x_1, \ldots, x_m$. عندئذ، تكون الجملتين الآتيتين متكافئتان.

(١) $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \models Q$.

(٢) *إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_m$ تقاريرًا حيث إن $P_1(A_1, \ldots, A_m)$, $P_2(A_1, \ldots, A_m), \ldots, P_n(A_1, \ldots, A_m)$ تقاريرًا صائبة فإن $Q(A_1, \ldots, A_m)$ تقرير صائب.*

البرهان

أولا، نفرض أن $P_1 \wedge ... \wedge P_n \models Q$. إذن، $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \longrightarrow Q$ مصدوقة. إذا كانت $A_1, ..., A_m$ تقاريراً حيث تكون $P_1(A_1, ..., A_m), ..., P_n(A_1 ..., A_m)$ تقارير صائبة فإن $P_1(A_1, ..., A_m) \wedge ... \wedge P_n(A_1, ..., A_m)$ تقرير صائب وبالتالي، فإن $Q(A_1, ..., A_m)$ تقرير صائب.

ثانيا، نفرض أن (٢) متحققة. لتكن $B_1, ..., B_m$ تقاريراً. إذا كانت $P_1(B_1, ..., B_m), P_2(B_1, ..., B_m), ..., P_n(B_1, ..., B_m)$ تقاريراً صائبة فإننا بالاستناد إلى (٢)، نجد أن $Q(B_1, ..., B_m)$ تقرير صائب. وبالتالي، فإن : $(P_1(B_1, ..., B_m) \wedge ... \wedge P_n(B_1, ..., B_m)) \longrightarrow Q(B_1, ..., B_m)$ تقرير صائب. أما إذا وجدت تقارير خاطئة بين التقارير $P_1(B_1, ..., B_m), ..., P_n(B_1, ..., B_m)$ فإن $P_1(B_1, ..., B_m) \wedge ... \wedge P_n(B_1, ..., B_m)$ تقرير خاطىء. وبالتالي، فإن : $(P_1(B_1, ..., B_m) \wedge ... \wedge P_n(B_1, ..., B_m)) \longrightarrow Q(B_1, ..., B_m)$ تقرير صائب. إذن، $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \longrightarrow Q$ مصدوقة، وبالتالي، فإن $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \models Q$. Δ

مثال (٢,١٤)

أثبت أن العبارة التقريرية $[(p \longrightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \longrightarrow \neg p$ مصدوقة.

الحل

يكفي أن نثبت أن $\neg q \vee \neg r$ و $p \longrightarrow (q \wedge r)$ تقتضي منطقياً $\neg p$. ولرؤية ذلك نستخدم الجدول التالي وننظر، بالاستناد إلى المبرهنة (٢,٥)، فقط إلى الأسطر التي

تحتوي على T في أعمدة $\neg q \vee \neg r$ و $p \longrightarrow (q \wedge r)$. في هذه الأسطر نجد أن عمود $\neg p$ يحتوي على T، وبالتالي، ينتج المطلوب.

جدول (٢,١٦)

p	q	r	¬q	¬r	q∧r	p ⟶ (q ∧ r)	¬q∨ ¬r	¬p
T	T	T	F	F	T	T	F	F
T	T	F	F	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T

مثال (٢,١٥)

أثبت أن العبارات التقريرية $q \longrightarrow r$ ، $r \longrightarrow \neg p$ و $q \longrightarrow p$ لا تقتضي منطقيًا q .

الحل

نستخدم المبرهنة (٢,٥) لإثبات المطلوب. لذلك، نبحث عن تقارير A , B, C حيث يتحقق التالي :

(*) B خاطىء بينما $C \longrightarrow B$, $C \longrightarrow \neg A$, $A \longrightarrow B$ صائبة.

نختار أي تقرير خاطىء ونرمز له بالرمز B. بما أن B خاطىء و $A \longrightarrow B$ صائب، إذن، A خاطىء. كذلك B خاطىء و $C \longrightarrow B$ صائب، إذن، C خاطىء. إذن $C \longrightarrow \neg A$ صائب. إذن، إذا اخترنا تقارير خاطئة A , B , C فإن (*) تتحقق، وبالتالي، ينتج المطلوب.

يقودنا النقاش المذكور في المثالين السابقين إلى تعريف الشكل الحجّي وهو مانقدمه الآن .

تعريف (٢,١٧)

لتكن $P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ *متتالية من العبارات التقريرية في* $x_1, \dots, x_m$ *نسمي* $P_1, P_2, \dots, P_n \therefore Q$ *شكلاً حُجِّياً. نسمي* $P_1, \dots, P_n$ *المقدمات المنطقية للشكل الحجي كما نسمي* Q *النتيجة .*

تعريف (٢,١٨)

نقول إن $P_1(x_1, \dots, x_m), \dots, P_n(x_1, \dots, x_m) \therefore Q(x_1, \dots, x_m)$ *شكل حجي صحيح إذا تحقق الشرط التالي :*

إذا كانت $q_1, \dots, q_m$ *أية تقارير حيث تكون* $P_1(q_1, \dots, q_m), \dots, P_n(q_1, \dots, q_m)$ *تقاريراً صائبة فإن* $Q(q_1, \dots, q_m)$ *تقرير صائب . كذلك نقول إن الشكل الحجي باطل إذا لم يتحقق الشرط السابق، أي توجد تقارير* $r_1, \dots, r_m$ *حيث تكون* $P_1(r_1, \dots, r_m), \dots, P_n(r_1, \dots, r_m)$ *تقاريراً صائبة ولكن* $Q(r_1, \dots, r_m)$ *يكون تقريراً خاطئاً .*

تعريف (٢,١٩)

لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ *متتالية من التقارير. نسمي* $A_1, \dots, A_n \therefore B$ *حُجَّة ونسمي* $A_1, \dots, A_n$ *المقدمات المنطقية للحجة كما نسمي* B *نتيجة هذه الحجة .*

تعريف (٢,٢٠)

لتكن $A_1 , \dots , A_n \therefore B$ حجة ولتكن $q_1 , \dots , q_m$ هي التقارير البسيطة المستخدمة في تكوين التقارير $A_1 , \dots , A_n, B$.

إذا استبدلنا $q_i \; (i =1, \dots , m)$ بمتغيرات تقريرية $x_i \; (i = 1, \dots , m)$ فإننا نحصل

على الشكل الحجي $A_1(x_1, \dots , x_m) , \dots , A_n(x_1, \dots , x_m) \therefore B (x_1, \dots , x_m)$

نسمي هذا الشكل الحجي شكل الحجة $A_1 , \dots , A_n \therefore B$.

تعريف (٢,٢١)

نقول إن $A_1 , \dots , A_n \therefore B$ حجة صحيحة إذا كان شكلها الحجّي صحيحًا.

كما نقول إن $A_1 , \dots , A_n \therefore B$ حجة باطلة إذا كان شكلها الحجّي باطلاً.

ملاحظة

من تعريف الحجة الصحيحة وتعريف (٢,١٦) والمبرهنة (٢,٥) نستطيع أن نستنتج مباشرة أن جميع العبارات التالية متكافئة :

(١) $A_1 , \dots , A_n \therefore B$ حجة صحيحة

(٢) $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B$

(٣) $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \longrightarrow B$ تقرير مصدوقي

(٤) التقارير $A_1 , \dots, A_n$ تقتضي منطقيًا التقرير B.

مثال (٢,١٦)

بيّن ما إذا كانت الحجة التالية صحيحة أم باطلة .

إذا سجّل خالد مقرر المنطق فإنه إما أن يكون محمدًا أو باسمًا قد سجل

المقرر. محمد لم يسجل مقرر المنطق. إذن، باسم سجل مقرر المنطق إذا كان خالد قد فعل ذلك.

الحل

لنفرض أن التقارير البسيطة K , M , B هي :

K : سجل خالد مقرر المنطق.

M : سجل محمد مقرر المنطق.

B : سجل باسم مقرر المنطق.

الآن نعبر عن الحجة بوساطة الرموز فنحصل على :

$K \longrightarrow (M \vee B)\ ,\ \neg M\ .\dot{}.\ K \longrightarrow B$ ، ثم نستبدل K, M , B بالمتغيرات p , q , r على الترتيب لنحصل على الشكل الحجي :

$p \longrightarrow (q \vee r)\ ,\ \neg q\ .\dot{}.\ p \longrightarrow r$ بعدئذ، نكون الجدول (٢,١٧).

من الجدول يتضح أن الاسطر التي يجب فحصها هي 3 ، 7 و 8 بدراسة هذه الاسطر نجد أن الشكل الحجي صحيح وبالتالي، فإن الحجة صحيحة.

جدول (٢,١٧)

p	q	r	$q \vee r$	$p \longrightarrow (q \vee r)$	$\neg q$	$p \longrightarrow r$
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

ملاحظة

إذا كان لدينا جدول مثل الجدول السابق، فإننا نسمي الأسطر التي يجب فحصها " الأسطر الحرجة ". وبناء عليه فإن الأسطر الحرجة في المثال السابق هي 3، 7 و8.

مثال (٢,١٧)

بين ما إذا كان الشكل الحجي التالي صحيحًا أم باطلا.

$$p \vee r\,,\ (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)\ \therefore\ \neg q$$

الحل

بالنظر إلى الجدول (١٨ ,٢)، نجد أن الأسطر الحرجة هي : 1، 5 و7 وبدراسة السطر 1، نجد أن الشكل الحجي باطل.

جدول (٢,١٨)

p	q	r	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow r$	$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)$	$p \vee r$	$\neg q$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	T	F	T	F	F	T	F
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	T

ملاحظة

من الجدير بالذكر أن استخدام الجداول لتحديد صحة شكل حجي أو بطلانه

يصبح مزعجًا جدًا كلما ازداد عدد المتغيرات. فعلى سبيل المثال، إذا كان لدينا شكل حجي في 10 متغيرات فإننا سنحتاج إلى 2^{10} =1024 سطرًا لإنشاء الجدول. وبناءً عليه، فإن البحث عن طرق أخرى لتحديد صحة الحجج أو بطلانها يتضمن أهمية خاصة. سنقدم إحدى تلك الطرق في الأمثلة التالية.

مثال (٢,١٨)

بيّن ما إذا كان الشكل الحجي التالي صحيحًا أم باطلا.

$$p \longrightarrow \neg r,\ r \longrightarrow (p \longrightarrow q),\ r \longrightarrow p\ \therefore\ \neg p \longrightarrow \neg q$$

الحل

سنحاول أن نعوض عن r، q وp بتقارير C، B وA على الترتيب حيث تكون المقدمات صائبة بينما النتيجة خاطئة. بما أن B¬ ⟵ A¬ تقرير خاطىء فإن A¬ تقرير صائب و B¬ تقرير خاطىء. وبالتالي، فإن A تقرير خاطىء و B تقرير صائب. بما أن A ⟵ C صائب و A خاطىء فإن C خاطىء. وبالتالي، فإن C¬ ⟵ A صائب و (B ⟵ A) ⟵ C صائب. إذن، إن التعويض عن p بتقرير خاطىء A وعن q بتقرير صائب B وعن r بتقرير خاطىء C يجعلنا نستنتج أن الشكل الحجي باطل.

مثال (٢,١٩)

بيّن ما إذا كانت الحجة التالية صحيحة أم باطلة :

$$B \longrightarrow H,\quad H \longrightarrow (B \longrightarrow D),\ B\ \therefore\ D$$

الحل

نستبدل H، D وB بالمتغيرات r، q وp على الترتيب فنحصل على الشكل الحجي.

$p \longrightarrow r, \quad r \longrightarrow (p \longrightarrow q), p \therefore q$

سنحاول أن نعوض عن r، q و p بتقارير M، L وQ على الترتيب حيث تكون المقدمات صائبة بينما النتيجة خاطئة. إذن، نعوض عن q بتقرير خاطىء L وعن p بتقرير صائب K. بما أن K صائب و K⟶M صائب، فإن M يجب أن يكون صائباً. عندئذ، $M \longrightarrow (K \longrightarrow L)$ خاطىء. وبالتالي، فإنه لايمكن إيجاد تقارير M، L و Q حيث تكون المقدمات صائبة والنتيجة خاطئة. إذن، الشكل الحجي صحيح، وبالتالي، فإن الحجة صحيحة.

تعريف (٢,٢٢)

لتكن $P_1, \ldots, P_n, \;\; C$ عبارات تقريرية في $x_1, \ldots, x_m$ حيث C تناقض. نقول إن $\{P_1, \ldots, P_n\}$ مجموعة مُتَّسقة إذا كان الشكل الحجي $P_1, \ldots, P_n \therefore C$ باطلا. أما إذا كان هذا الشكل الحجي صحيحًا فإننا نقول إن المجموعة غير متسقة.

ملاحظة

من التعريف، نجد أنه إذا أردنا أن نثبت اتِّساق $P_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, P_n(x_1, \ldots, x_m)$ فإنه يكفي أن نجد تقارير $q_1, \ldots, q_m$ حيث تكون $P_1(q_1, \ldots, q_m), \ldots, P_n(q_1, \ldots, q_m)$ صائبة ؛ وإذا استحال علينا ذلك فإن المجموعة تكون غير متسقة.

مثال (٢,٢٠)

بين ما إذا كانت المجموعة التالية متسقة أم لا :

$$\{r \longrightarrow p, \quad r, (q \vee r) \longrightarrow \neg p\}$$

الحل

سنحاول أن نجد تقارير A, B, C حيث تكون التقارير $C \longrightarrow A , C , (B \vee C) \longrightarrow \neg A$ صائبة . بما أن C صائب و $C \longrightarrow A$ صائب فإن A صائب . عندئذ، $(B \vee C) \longrightarrow \neg A$ خاطىء مهما كان اختيار B . إذن، لايمكن أن نجد اختياراً مناسباً وبالتالي ، فإن المجموعة غير متسقة .

مثال (٢,٢١)

بين ما إذا كانت المجموعة التالية متسقة أم لا :

$$\{p \longrightarrow (q \longrightarrow r) , q \wedge \neg r , \neg p \}$$

الحل

سنحاول أن نجد تقارير A , B , C حيث تكون التقارير $A \longrightarrow (B \longrightarrow C) , B \wedge \neg C , \neg A$ صائبة . بما أن $\neg A$ صائب، فإن A خاطىء. بما أن $B \wedge \neg C$ صائب فإن B صائب و C خاطىء . عندئذ، يكون $A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$ صائبًا . إذن، المجموعة متسقة .

تعريف (٢,٢٣)

نقول إن مجموعة التقارير $\{A_1, A_2 , \ldots , A_n\}$ مجموعة متسقة إذا كانت مجموعة عباراتها التقريرية متسقة .

تمارين (٢,٢)

في التمارين من ١ إلى ١٢ بيّن ما إذا كانت الحجة صحيحة أم باطلة :

(١) إذا كان خالد ووسيم مسجلين في مقرر المنطق فإن بهاء كذلك . وسيم مسجل

في مقرر المنطق. إذن، إما وسيم مسجل في المقرر وإما بهاء غير مسجل في المقرر.

(٢) إذا كان اليوم هو السبت فان المكتبة مفتوحة. إذا كانت المكتبة مفتوحة فإنه يجب على علي أن يدرس في المكتبة. إذن، إذا كان اليوم هو السبت فإنه يجب على علي أن يدرس في المكتبة.

(٣) إذا كان بهاء طالبًا مجتهدًا فإنه سينجح في مقرر المنطق. بهاء طالب ذكي جدًا لكنه غير مجتهد. إذن، بهاء سينجح في مقرر المنطق.

(٤) إذا درست فإنني سأنجح في مقرر الرياضيات. إذا لم ألعب كرة القدم فإنني سأدرس. لقد رسبت في مقرر الرياضيات. إذن، لقد لعبت كرة القدم.

(٥) إذا كان 8 عددًا زوجيًا فإن العدد 9 لايقبل القسمة على 2 بدون باق. إما 7 عددا غير أولي أو العدد 9 يقبل القسمة على 2 بدون باق. العدد 7 عددٌ أولي. إذن، 8 عدد فردي.

(٦) علي مُزارع أو مدرس، ولكنه ليس مدرسًا ومزارعًا. إذا كان يحمل قلمًا فإنه مدرس. علي مزارع. إذن، علي لايحمل قلما.

(٧) إذا كان الجو معتدلا والسماء صافية فإننا إما أن نجلس في الحديقة العامة أو نلعب كرة القدم. ليس صحيحًا أنه إذا لم نجلس في الحديقة العامة فإن السماء غير صافية. إذن، إما أن الجو معتدل أو أننا نلعب كرة القدم.

(٨) إذا كان عمر وزيرًا فإنه مشهور. عمر ليس وزيرًا. إذن، عمر ليس مشهورًا.

(٩) إذا حصل وسيم على الجائزة الأولى في مسابقة الرياضيات فإنه إما أن يحصل بهاء على الجائزة الثانية أو أن ينسحب خالد من المسابقة. بهاء لم يحصل على الجائزة الثانية أو لم ينسحب خالد من المسابقة. إذن، لم يحصل وسيم على الجائزة الأولى.

(١٠) إذا كان حسام يحمل رخصة قيادة فإنه في العشرين من عمره على الأقل . حسام في العشرين من عمره على الأقل . إذن ، يحمل حسام رخصة قيادة .

(١١) إذا كان علي أقصر من عمر وكان عمر أقصر من حسن فإن عليًا أقصر من حسن . علي أقصر من عمر ولكنه ليس أقصر من حسن . إذن ، عمر ليس أقصر من حسن .

(١٢) في هذا التمرين اعتبر a ، b وc أعدادًا حقيقية معيّنة ، أي أن كلا من a ، b وc ثابت .

إذا كان $a > 0$ ، فإن $b > c$ إذا وفقط إذا كان $ab > ac$. إن $ab > ac$. إذن ، $b > c$.

في التمارين من ١٣ إلى ٢٢ بيّن ما إذا كان الشكل الحجي صحيحًا أم باطلا .

(١٣) $p \longrightarrow (r \vee q)\ ,\ r \longrightarrow \neg q\ \therefore\ p \longrightarrow r$

(١٤) $p \longrightarrow q\ ,\ q\ \therefore\ q$

(١٥) $p \longrightarrow q\ ,\ q\ \therefore\ p$

(١٦) $q \longrightarrow r\ ,\ p \longrightarrow q\ \therefore\ p \longrightarrow r$

(١٧) $\neg q \longrightarrow q\ ,\ p \longrightarrow q\ \therefore\ q$

(١٨) $p \vee \neg q\ ,\ \neg p \vee q\ \therefore\ p \longleftrightarrow q$

(١٩) $(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s)\ ,\ p \vee r\ \therefore\ q \vee s$

(٢٠) $p \longrightarrow q\ ,\ r \longrightarrow s\ ,\ p \vee \neg s\ ,\ \neg s \longrightarrow \neg q\ \therefore\ r \longleftrightarrow \neg p$

(٢١) $p \longrightarrow q\ ,\ (r \vee q) \longrightarrow p\ ,\ s \longrightarrow (\neg u \vee \neg q)\ \therefore\ s \longrightarrow (r \longrightarrow \neg u)$

(٢٢) $\neg p \longrightarrow (r \vee s)\ ,\ u \longrightarrow s\ ,\ \neg s\ ,\ q \longrightarrow (u \wedge w)\ \therefore\ (p \longrightarrow q) \longrightarrow r$

في التمـارين من ٢٣ إلى ٢٧ بيّن ما إذا كـانت العبـارات التقريريـة المعطاه متسقة أم لا .

(٢٣) $p \longrightarrow q\ ,\ r \longrightarrow \neg q\ ,\ \neg r \longrightarrow s\ ,\ p \wedge \neg s$

(٢٤) $p \longrightarrow (q \longleftrightarrow r)\ ,\ q \longrightarrow s\ ,\ (q \vee r) \longrightarrow \neg s\ ,\ p \wedge \neg s$

(٢٥) $p \longleftrightarrow (q \vee r)\ ,\ q \longleftrightarrow \neg p\ ,\ q \vee s\ ,\ \neg r \vee \neg s$

(٢٦) $p \longrightarrow \neg r\ ,\ r \wedge (\neg p \vee \neg s)\ ,\ \neg p \wedge s\ ,\ \neg q \longrightarrow \neg s$

(٢٧) $r \vee \neg s,\ r \longrightarrow (p \vee \neg s)\ ,\ s \vee \neg q\ ,\ p \longrightarrow q$

(٢٨) بيّن ما إذا كانت مجموعة التقارير التالية متسقة أم لا .

إذا حصل كل من علي وخالد على الشهادة الجامعية فإنه إما أن يحصل علي أو خالد على وظيفة . إذا حصل علي على وظيفة فإن خالدا لن يحصل على وظيفة . لم يحصل علي ولا خالد على الشهادة الجامعية ولكن أحدهما حصل على وظيفة .

(٢,٣) حساب المُسْنَدات
Predicate Calculus

تحتوي الرياضيات على عبارات مثل : $x^2 + 1 < 5$ ، $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، لكل أعداد حقيقية x, y, z إن $x + (y+z) = (x+y) + z$ ، يوجد عدد صحيح بين العددين 3 و 17 . كل عدد صحيح موجب إما أن يكون أوليًا أو غير أولي ، وهلم جرا .

لقد درسنا في البند (٢,١) حساب التقارير ووجدنا أننا لانستطيع أن نعبر عن العبارات السابقة باستخدام لغة حساب التقارير . إذن ، هناك حاجة ملحّة

لتوسيع هذه اللغة للتعبير عن الجمل المستخدمة في الرياضيات وهذا هو مايقدمه لنا حساب المسندات.

تعريف (٢,٢٤)

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغيرات مجالاتها $D_1, D_2, \ldots, D_n$ على الترتيب. نقول إن العبارة $P(x_1, \ldots, x_n)$ جملة مفتوحة على $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ إذا كان $P(d_1, \ldots, d_n)$ تقريرًا لكل نوني مرتب $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$.

تعريف (٢,٢٥)

إذا كانت $P(x_1, \ldots, x_n)$ جملة مفتوحة على $D_1 \times \ldots \times D_n$ فإننا نعرف مجموعة الصواب T_P للجملة المفتوحة $P(x_1, \ldots, x_n)$ كما يلي:

$T_P = \{(y_1, \ldots, y_n): (y_1, \ldots, y_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ و $P(y_1, \ldots, y_n)$ صائب $\}$.

مثال (٢,٢٢)

(أ) إذا كانت العبارة $P(x)$ هي " $x+1<0$ " فإن $P(x)$ جملة مفتوحة على $\mathbb{Z}=\{\ldots,-1, 0, 1,3, \ldots\}$ كما أن $T_p=\{\ldots, -3, -2\}$.

(ب) إذا كانت العبارة $P(x)$ هي " $x+2<0$ " فإن $P(x)$ جملة مفتوحة على $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ كما أن $T_P=\phi$.

(جـ) إذا كانت العبارة $P(x)$ هي $x^2+1>0$ فإن $P(x)$ جملة مفتوحة على $\mathbb{R}$، حيث $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية، كما أن $T_P=\mathbb{R}$.

تعريف (٢,٢٦)

المسور الشامل هو الرمز $\forall$ ويقرأ « لكل » . المسور الوجودي هوالرمز $\exists$ ويقرأ «يوجد» .

تعريف (٢,٢٧)

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة على D . نعتبر الجملة الخبرية " لكل $x \in D$ إن $P(x)$ " ، نرمز لها بـ $(\forall x \in D)\ P(x)$. نقول إن $(\forall x \in D)\ P(x)$ صائبة إذا كان $T_p = D$ ، كما نقول $(\forall x \in D)\ P(x)$ خاطئة إذا كان $T_p \neq D$. نسمي $\forall x \in D\ ,\ P(x)$ تقريراً شاملاً . إذا كان $d \in D$ حيث $P(d)$ تقرير خاطىء فإننا نسمي d مثالا مناقضًا للتقرير $(\forall x \in D)\ P(x)$.

مثال (٢,٢٣)

جد قيمة الصواب لكل من التقارير الشاملة التالية :

(أ) $(\forall x \in D)\ \ x^2 > x + 1$ حيث $D = \{-2, 3, 5\}$.

(ب) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n + 5 > 2$ حيث $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$.

(جـ) $(\forall n \in \mathbb{Z})\ n + 5 > 2$ حيث $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$.

الحل

(أ) التقارير $(-2)^2 > -2+1$ ، $3^2 > 3+1$ ، $5^2 > 5+1$ صائبة .
إذن $T_P = D$ وبالتالي ، فإن التقرير الشامل المعطى تقرير صائب .

(ب) واضح أن $T_P = \mathbb{N}$ ، إذن ، التقرير المعطى صائب .

(جـ) $-8+5>2$ تقرير خاطىء . إذن ، $T_P \neq \mathbb{Z}$ وبالتالي ، فإن التقرير المعطى خاطىء .

تعريف (٢,٢٨)

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة على D. نعتبر الجملة الخبرية " يوجد $x \in D$ حيث $P(x)$" ؛ نرمز لها بـ $(\exists x \in D)\ P(x)$.

نقول إن $(\exists x \in D)\ P(x)$ صائبة إذا كان $T_p \neq \phi$، كما نقول إن $(\exists x \in D)\ P(x)$ خاطئة إذا كان $T_p = \phi$. نسمي $(\exists x \in D)\ P(x)$ تقريرا وجوديا.

مثال (٢,٢٤)

جد قيمة الصواب لكل من التقارير الوجودية الآتية :

(أ) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = -3)$.

(ب) $(\exists x \in D)(x^2 < x)$. حيث $D = \{\frac{1}{4}, 1, 2, 3\}$.

(جـ) $(\exists n \in \mathbb{Z})(n^2 = 1)$.

الحل

(أ) واضح أن $T_p = \phi$، إذن، التقرير المعطى خاطىء.

(ب) نجد بسهولة أن $T_p = \{\frac{1}{4}\}$. إذن، $T_p \neq \phi$ وبالتالي، فإن التقرير المعطى صائب.

(جـ) نجد بسهولة أن $T_p = \{-1, 1\} \neq \phi$. إذن، التقرير المعطى صائب.

تعريف (٢,٢٩)

نسمي $(\forall x \in D)\ (R(x) \longrightarrow Q(x))$ تقريراً شرطيا شاملا، حيث كل من $Q(x)$ و $R(x)$ جملة مفتوحة على D.

مثال (٢,٢٥)

استخدم الرموز للتعبير عن كل من التقارير التالية :

(١) إن مربع أي عدد صحيح فردي هو عدد صحيح فردي .

(٢) إن مربع أي عدد حقيقي أكبر من 2 هو عدد حقيقي أكبر من 3 .

(٣) كل مربع مستطيل .

(٤) كل طالب يحب الرياضيات يحب الفيزياء أيضًا .

(٥) كل طالب حضر اجتماع أولياء الأمور كان مصحوبًا بأحد والديه على الأقل .

الحل

(١) لتكن $\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة ولنرمز للعبارة " x عدد فردي " بالرمز Ox . عندئذ، يمكن التعبير عن الجملة كالتالي :

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\ (Ox \longrightarrow Ox^2)$$

(٢) إذا كانت $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية . فإنه يمكن التعبير عن الجملة كالتالي :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (x > 2 \longrightarrow x^2 > 3)$$

(٣) لتكن D هي مجموعة جميع المضلعات ولنرمز للعبارة " x مربع " بالرمز Sx والعبارة " x مستطيل " بالرمز Rx . وبالتالي ، فإن ترجمة الجملة تكون :

$$(\forall x \in D)\ (Sx \longrightarrow Rx)$$

(٤) لنفرض أن S هي مجموعة الطلاب ولنرمز للعبارة " x يحب الرياضيات " بالرمز Mx وللعبارة " x يحب الفيزياء " بالرمز Px . وبالتالي ، فإن ترجمة الجملة تكون :

$$(\forall x \in S)\ (Mx \longrightarrow Px)$$

(٥) لاحظ أننا نستطيع كتابة هذه الجملة كالتالي :

لكل طالب x، إذا حضر x اجتماع أولياء الأمور فإنه يوجد y أحد والدي x و x مصحوبًامع y.

لنفرض أن S هي مجموعة الطلاب و P هي مجموعة الآباء والأمهات ولنرمز للعبارة " x حضر اجتماع أولياء الأمور " بالرمز Mx وللعبارة " x مصحوبا مع y " بالرمز Axy وللعبارة " y أحد والدي x " بالرمز Txy. عندئذ نستطيع ترجمة الجملة كالتالي:

$$(\forall x \in S) \left[Mx \longrightarrow (\exists\, y \in P)\ (Axy \wedge Txy)\right]$$

ملاحظة

إذا كانت مجالات الجمل المفتوحة تحت الدراسة معلومة من سياق المعنى فإننا، ابتغاءً للسهولة، نستغني عن كتابة هذه المجالات عند صياغة الجمل باستخدام الترميز.

فمثلاً نكتب $\forall x\,(Ox \longrightarrow Ox^2)$ بدلا من $(\forall x \in \mathbb{Z})\,(Ox \longrightarrow Ox^2)$

مثال (٢,٢٦)

استخدم الرموز للتعبير عن التقرير " يوجد عدد صحيح موجب حيث يكون أوليًا وفرديًا ".

الحل

لتكن $\mathbb{N}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ولنرمز للعبارة " x عدد أولي " بالرمز Px وللعبارة " x فردي " بالرمز Ox. عندئذ، تكون ترجمة الجملة:

$$(\exists\, x \in \mathbb{N})\ (Px \wedge Ox)$$

أو

$$(\exists\, x)\ (Px \wedge Ox)$$

مثال (٢,٢٧)

استخدم الرموز للتعبير عن التقرير " كل عدد حقيقي غير سالب يجب أن يكون له جذر تربيعي " .

الحل

يمكن التعبير عن هذا التقرير بصورة رمزية كالتالي :

$$(\forall x)\left[(x \geq 0) \longrightarrow (\exists y)(x = y.y)\right]$$

ملاحظات

(أ) نعتبر التقرير $(\forall x{\in}D)\,(R(x) \longrightarrow Q(x))$. نلاحظ أنه إذا كانت $T_R = \phi$ فإن هذا التقرير صائب . في مثل هذه الحالة ، نقول إن التقرير صائب فراغيا .

(ب) إذا كانت $P(x)$ جملة مفتوحة على D وكانت $B \subseteq D$ فإنه يمكن اعتبار $P(x)$ جملة مفتوحة على B . نستخدم $T_{P|B}$ لنعبر عن مجموعة صواب $P(x)$ كجملة مفتوحة على B .

مبرهنة (٢,٦)

ليكن كل من $Q(x)$ ، $R(x)$ و $P(x)$ جملة مفتوحة على D حيث $P(x)$ هي $R(x) \longrightarrow Q(x)$. لتكن $B = T_R$. عندئذ ، $(\forall x{\in}D)\ P(x)$ تقرير صائب إذا وفقط إذا كان $(\forall x{\in}B)\ Q(x)$ تقريراً صائباً .

البرهان

نفرض أن $(\forall x{\in}B)\ P(x)$ تقرير صائب . إذن ، $T_P = D$. إذن ، $B = T_R \subseteq T_Q$. إذن ، $T_{Q|B} = B$. إذن ، $(\forall x{\in}B)\ Q(x)$ صائب .

الآن، نفـــرض أن $(\forall x\in B)\ Q(x)$ تقـــرير صـــائب. إذن، $T_{Q|B}=B=T_R$. ومنـه $T_R \subseteq T_Q$. إذن، $T_P= D$. وبالتالي، فإن $(\forall\ x\in D)\ P(x)$ تقرير صائب. Δ

مبرهنة (٢,٧)

ليكن كل من $Q(x)$، $R(x)$ و $P(x)$ جملة مفتوحة على D حيث $P(x)$ هي $R(x) \wedge Q(x)$. لتكن $B= T_R$. عندئذ، $(\exists\ x\in D)\ P(x)$ تقرير صائب إذا وفقط إذا كان $(\exists\ x\in B)\ Q(x)$ تقريراً صائبًا •

البرهان

نفـــرض أن $(\exists\ x\in D)\ P(x)$ تقـــرير صـــائب. إذن، $T_P\neq \phi$ ، ومنه، فـــإن $T_R \cap T_Q\neq \phi$ ، أي أن $B \cap T_Q\neq \phi$. ولـــكـــن $T_{Q|B} = B \cap T_Q$. إذن، $T_{Q|B} \neq \phi$

وبالتالي، فإن $(\exists\ x\in B)\ Q(x)$ تقرير صائب.

الآن، نفرض أن $(\exists\ x\in B)\ Q(x)$ تقرير صائب. إذن، $T_{Q|B} \neq \phi$ ومنه، فـإن $B \cap T_Q\neq \phi$ ، أي $T_R \cap T_Q\neq \phi$ ، إذن، $T_P \neq \phi$ وبالتـــــالي، فـــإن $P(x)$ $(\exists\ x\in D)$ تقرير صائب. Δ

(٢,٣,١) نفي التقارير المسورة

(Negation of quantified statements)

مبرهنة (٢,٨)

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة على D. عندئذ، $\neg[(\forall\ x\in D)\ P(x)]$ تقرير صائب إذا فقط إذا كان $(\exists\ x\in D)(\neg P(x))$ تقريراً صائبًا .

البرهان

نفــرض أن $\neg[(\forall x \in D)\ P(x)]$ تقــرير صــائب. إذن، $(\forall x \in D)\ P(x)$ تقــرير خـــــاطىء. ومنـه، فـــــإن $T_P \neq D$. إذن، $T_{\neg P} \neq \phi$ لأن $T_P \cap T_{\neg P} = \phi$، $T_P \cup T_{\neg P} = D$. وبالتالي، فإن $(\exists x \in D)(\neg P(x))$ تقرير صائب.

الآن نفـرض أن $(\exists x \in D)(\neg P(x))$ تقـرير صـائب. إذن، $T_{\neg P} \neq \phi$. ومنه، فـإن $T_P \neq D$. إذن، $(\forall x \in D)\ P(x)$ خـاطىء، وبالتـالي، فـإن $\neg[(\forall x \in D)\ P(x)]$ تقرير صائب. Δ

مبرهنة (٢,٩)

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة على D. عندئذ، $\neg[(\exists x \in D) P(x)]$ تقرير صائب إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in D)\ (\neg P(x))$ تقريراً صائباً.

البرهان

نفـرض أن $\neg[(\exists x \in D)\ P(x)]$ تقـرير صـائب. إذن، $(\exists x \in D)\ P(x)$ خـاطيء، ومنه، فـإن $T_P = \phi$، وبالتـالي، فـإن $T_{\neg P} = D$، أي أن $(\forall x \in D)\ (\neg P(x))$ تقـريراً صائباً.

الآن نفـرض $((\forall x \in D)\ (\neg P(x)))$ تقـرير صـائب. إذن، $T_{\neg P} = D$ وبالتـالي، فإن $T_P = \phi$. إذن، $(\exists x \in D) P(x)$ خـاطىء وبالتـالي، فـإن $\neg[(\exists x \in D)\ P(x)]$ تقـرير صائب. Δ

مبرهنة (٢,١٠)

لتكن كل من $Q(x)$ ، $R(x)$ جملة مفتوحة على D ، عندئذ، $\neg[(\forall x\in D)\ (R(x) \longrightarrow Q(x))]$ تقرير صائب إذا وفقط إذا كان $(\exists x\in D)\ (R(x) \wedge \neg Q(x))$ تقريرًا صائبًا.

البرهان

نفرض أن $\neg[(\forall x\in D)\ (R(x) \longrightarrow Q(x))]$ تقرير صائب. إذن، $(\forall x\in D)\ (R(x) \longrightarrow Q(x))$ تقرير خاطىء. ومنه، فإن $T_{R \longrightarrow Q} \neq D$. إذن، $T_R \not\subset T_Q$. ومنه فإن $T_R \cap T_{\neg Q} \neq \phi$. إذن، $T_{R \wedge \neg Q} \neq \phi$ وبالتالي، فإن $(\exists x\in D)\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$ تقرير صائب.

الآن نفرض أن $(\exists x\in D) R(x) \wedge \neg Q(x))$ تقرير صائب. إذن، $T_{R \wedge \neg Q} \neq \phi$. ومنه، فإن : $T_R \cap T_{\neg Q} \neq \phi$ وبالتالي، فإن $T_R \not\subset T_Q$. إذن، $T_{R \longrightarrow Q} \neq D$. إذن، $(\forall x\in D)\ (R(x) \longrightarrow Q(x))$ تقرير خاطىء وبالتالي، فإن $\neg[(\forall x\in D)\ (R(x) \longrightarrow Q(x))]$ تقرير صائب. Δ

(٢,٣,٢) التقارير المسورة التي تحتوي على أكثر من متغير واحد

Quantified statements with more than one variable

في ما يلي، ابتغاء للسهولة، سنقوم بحذف الأقواس عند كتابة بعض العبارات؛ فمثلا سنكتب $\forall x\in A\ \forall y\in B\ P(x\ ,\ y)$ بدلا من $(\forall x\in A)\ ((\forall y \in B)\ P(x\ ,\ y))$. كذلك، سنكتب $\forall x\in A\ \exists y \in B\ P(x\ ,\ y)$ بدلا من $(\forall x\in A)\ (\exists y \in B)(P(x\ ,\ y))$ ، وإذا كان $A=B$ فإننا سنحذف A و B على أن يفهم المعنى من السياق. بالإضافة إلى ذلك، فإننا سنرمز للعبارة «. . . تقرير صائب إذا وفقط إذا . . . » بالرمز «$\Leftrightarrow$».

تعريف (٢,٣٠)

إذا كانت $P(x, y)$ جملة مفتوحة على $B \times A$ فإننا نقول إن $\forall x \in A\ \forall y \in B\ P(x, y)$ تقرير صائب إذا كان $T_P = A \times B$ كما نقول إنه تقرير خاطىء إذا كان $T_P \neq A \times B$.

مثال (٢,٢٨)

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ (x + y = y + x)$ تقرير صائب لأن $T_P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (تذكر أن عملية الجمع إبدالية على $\mathbb{R}$).

مثال (٢,٢٩)

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ (x + 2 < y)$ تقرير خاطىء لأن $(0,1) \notin T_P$ (وبالتالي، فإن $T_P \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

تعريف (٢,٣١)

إذا كانت $P(x, y)$ جملة مفتوحة على $A \times B$ فإننا نقول إن $\exists x \in A\ \exists y \in B\ \ P(x, y)$ تقرير صائب إذا كان $T_P \neq \phi$. كما نقول إنه تقرير خاطىء إذا كان $T_P = \phi$.

مثال (٢,٣٠)

$\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ (x + 5 = y^2)$ تقرير صائب لأن $(20,5) \in T_P$

(وبالتالي، فان $T_P \neq \phi$).

مثال (٢,٣١)

$\exists x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \left(\sqrt{2} = \frac{x}{y}\right)$ تقرير خاطىء لأن $\sqrt{2}$ عدد غير كسري.

تعريف (٢,٣٢)

إذا كانت $P(x, y)$ جملة مفتوحة على $A \times B$ فإننا نقول إن $\forall x \in A \exists y \in B\ P(x, y)$ تقرير صائب إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي :

لكل تعويض عن x بعنصر $a \in A$ فإن $\exists y \in B\ P(a, y)$ تقرير صائب، كما نقول إنه تقرير خاطىء إذا لم يتحقق الشرط المذكور أعلاه.

مثال (٢,٣٢)

ليكن $A = B = \{-1,0,1\}$. إن $(\forall x \exists y,\ x + y = 0)$ تقرير صائب لأن :

$\exists y\ (0 + y = 0)$ تقرير صائب (عَوِّض عن y بالعنصر 0)،

$(\exists y,\ 1 + y = 0)$ تقرير صائب (عَوِّض عن y بالعنصر 1-)،

$\exists y\ (-1 + y = 0)$ تقرير صائب (عَوِّض عن y بالعنصر 1).

مثال (٢,٣٣)

ليكن $A = B = \{0,1,2\}$. إن $\forall x \exists y\ (y < x)$ تقرير خاطىء لأن $\exists y \in A\ (y < 0)$ تقرير خاطىء.

تعريف (٢,٣٣)

إذا كانت $P(x, y)$ جملة مفتوحة على $A \times B$ فإننا نقول إن $\exists x \in A \forall y \in B\ P(x, y)$ تقرير صائب إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي :

توجد قيمة $a \in A$ للمتغير x حيث $\forall y \in B\, P(a, y)$ تقرير صائب كما نقول إنه تقرير خاطىء إذا لم يتحقق الشرط المذكور أعلاه .

مثال (٢,٣٤)

ليكن $A = B = \{0,1,2\}$. إن $\exists x \forall y\ (x + y = y)$ تقـــرير صـــائب لأن $\forall y\ (0+y = y)$ تقرير صائب .

مثال (٢,٣٥)

ليكن $A = B = \{0,1,2\}$. إن $\exists x \forall y\ (x > y)$ تقرير خاطىء لأن :

$\forall y\ (0 > y)$ ، $\forall y\ (1 > y)$ ، $\forall y\ (2 > y)$ تقارير خاطئة .

ملاحظة

بالاستناد إلى المبرهنات السابقة ، يمكن الحصول على بعض النتائج المتعلقة بنفي التقارير

(١)
$$\begin{aligned} \neg(\forall x \exists y\, P(x, y)) &\Leftrightarrow \neg[\forall x\ (\exists y\, P(x, y))] \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg (\exists y\, P(x, y)) \\ &\Leftrightarrow \exists x \forall y\, \neg P(x, y) \end{aligned}$$

(٢)
$$\begin{aligned} \neg\left(\exists x \forall y\, P(x, y)\right) &\Leftrightarrow \neg[\exists x\ (\forall y\, P(x, y))] \\ &\Leftrightarrow \forall x \neg (\forall y\, P(x, y)) \\ &\Leftrightarrow \forall x \exists y\ \neg P(x, y)) \end{aligned}$$

مثال (٢,٣٦)

اكتب كل جملة من الجمل التالية بصورة رمزية :

(أ) كل طالب يحب الرياضيات يحب الفيزياء أيضًا.

(ب) جميع الطيور حيوانات.

(جـ) بعض القطط ليس لها ذيل.

(د) إذا كنت طالبًا في هذا المقرر وتنجز واجباتك فسوف تحصل على امتياز.

الحل

(أ) لنرمز :

Sx : x طالب، Mx : x يحب الرياضيات و Px : x يحب الفيزياء

الصورة الرمزية للجملة هي :

$$\forall x (Sx \wedge Mx \longrightarrow P x)$$

(ب) لنرمز :

Px : x طير و Ax : x حيوان.

الصورة الرمزية للجملة هي :

$$\forall x (Px \longrightarrow A x)$$

(جـ) لنرمز :

Cx :x قطة و Tx :x لها ذيل

الصورة الرمزيه للجملة هي :

$$\exists x (Cx \wedge \neg Tx)$$

(د) لنرمز

Sx :x طالب في هذا المقرر، Hx : x ينجز واجباته و Ax : x سيحصل على امتياز.

الصورة الرمزية للجملة هي :

$$\forall x \left((Sx \wedge H x) \longrightarrow A x\right)$$

مثال (٢,٣٧)

أكتب كل جملة من الجمل التالية بصورة رمزية

(أ) قانون توزيع عملية الضرب على الجمع .

(ب) بعض الأعداد الصحيحة تكون مضاعفات للعدد 5 .

(جـ) العدد 10 مضاعف موجب لعدد صحيح ما .

(د) مجموع أي عددين فرديين يجب أن يكون عدداً زوجياً .

الحل

(أ) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ \big(x\ .\ (y+z) = x\ .\ y + x\ .\ z\big)$

(ب) $(\exists x)\ (\exists y)\ (x = 5\ .y)$

(جـ) $(\exists x)\ (\exists y)\ (x > 0 \wedge 10 = x\ .y)$

(د) $(\forall x)\ (\forall y)\ \big[(\exists u)\ (\exists v)\ (x = 2.u+1 \wedge y = 2.v+1) \longrightarrow (\exists z)\ (x+y = 2.z)\big]$

تمارين (٢,٣)

استخدم المسوّرات للتعبير عن التقارير في التمارين من ١ إلى ٢٠ بصورة رمزية

(١) جميع الأعداد الطبيعية أعداد كسرية .

(٢) جميع الأعداد الكسرية أعداد حقيقية .

(٣) بعض الأعداد الحقيقية ليست أعداداً كسرية .

(٤) جميع الأعداد الأولية أعداد فردية ما عدا العدد 2 .

(٥) يوجد عدد صحيح حيث يكون زوجياً وأوّلياً .

(٦) إذا كان العدد صحيحاً فإنه كسري .

(٧) إذا كان العدد فردياً فإن مربعه فردي .

(٨) لكل عدد حقيقي يوجد عدد صحيح أكبر منه .

(٩) كل عدد حقيقي إما أن يكون موجبًا أو سالبًا أو يساوي الصفر .

(١٠) كل مضاعف موجب للعدد 7 يجب أن يكون أكبر من 5 .

(١١) يوجد لكل عدد صحيح نظير جمعي .

(١٢) حاصل ضرب عدد صحيح بعدد زوجي يجب أن يكون عددًا زوجيًا .

(١٣) يوجد عدد صحيح فردي حيث يكون قاسمًا لكل عدد صحيح زوجي .

(١٤) كل أستاذ جامعي يجب أن يكون أكبر من أي من طلابه .

(١٥) كل طالب يحترم أستاذه يحترم نفسه .

(١٦) بعض الناس يثق بكل الناس .

(١٧) كل حيوان له سنام يجب أن يكون جملا .

(١٨) كل مثلث له ثلاثة أضلاع .

(١٩) جميع الطلاب استطاعوا أن يجيبوا عن بعض مسائل الاختبار .

(٢٠) بعض الطلاب الذين يحبون الرياضيات يحبون الفيزياء يضًا .

(٢١) لتكن $D = \{-4, -2, 0, 1, 3\}$. جد قيمة الصواب لكل من التقارير التالية ، وإذا كان التقرير خاطئا فأعط مثالا مناقضا له .

(أ) $(\forall x \in D)$ ((x فردي) $\longrightarrow x > 0$) .

(ب) $(\forall x \in D)$ ((x زوجي) $\longrightarrow x < 0$) .

(جـ) $(\forall x \in D)$ ((x زوجي) $\longrightarrow x \leq 0$) .

(د) $(\exists x \in D)$ (x أوّلي) .

(هـ) $(\exists x \in D)(x^2 > 17)$.

(٢٢) جد قيمة الصواب لكل من التقارير التالية ، وإذا كان التقرير خاطئًا فأعط مثالا مناقضًا له .

(أ) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (x = |x|)$.

(ب) $(\forall x \in \mathbb{N})\ \ (x = |x|)$.

(جـ) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (x^2 + 3 > 0)$

(د) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (x^2 = 4x)$.

(هـ) $(\exists x \in \mathbb{Z})\ (x + 2 = x^2)$.

(٢٣) لتكـن $D = \{-1, 0, 1, 2\}$ ، جد قيمة الصـواب لكل مـن التقارير التالية

(أ) $(\exists x \in D)\ (x+2 < 5)$.

(ب) $(\forall x \in D)\ (x+2 < 5)$.

(جـ) $(\forall x \in D)\ (x+3 \le 5)$.

(د) $(\exists x \in D)\ (x+3 = 8)$.

(هـ) $(\exists x \in D)(2x^2 + x = 0)$.

(٢٤) لتكن $D = \{-1,1,2\}$. جد قيمة الصواب لكل من التقارير التالية

(أ) $\exists x \forall y\ (D\ x < y^2+1)$.

(ب) $\forall x \exists y\ (x^2 + y^2 < 10)$.

(جـ) $\forall x \forall y\ (x^2 + y^2 < 4)$.

(د) $\exists x \exists y\ (x + y < 1)$.

(هـ) $\exists x \exists y \forall z\ (x^2 + y^2 \le 2z^2)$.

(٢٥) استخدم الرموز التالية لتعبر عن كل مما يلي بلغة عربية سليمة

x : Cx قطة ، X: Dx كلب ، x : Tx له ذيل ، x : Bxy بعض y ، Lxy: x يحب y .

(أ) $(\exists x)\ (Dx \wedge \neg Tx)$.

(ب) $(\forall x)\ (D\,x \longrightarrow Tx)$.

(جـ) $(\exists x)\,(Cx \wedge (\forall y)\,(Dx \longrightarrow Bxy))$.

(د) $(\exists x)\,(\exists y)\,(x \wedge Dy \wedge Lxy)$.

(٢٦) لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ جملتين مفتوحتين على D .

أثبت كلا مما يلي :

(أ) $\neg\,(\exists x)\,P(x)$ تقرير صائب إذا وفقط إذا كان $(\forall x)\,(\neg\,P(x))$ تقريراً صائبًا .

(ب) $\neg\,(\exists x)\,(P(x) \wedge Q(x))$ تقرير صائب إذا وفقط إذا كان $(\forall x)\,(P(x) \longrightarrow \neg\,Q(x))$ تقريراً صائبًا .

(٢٧) لتكن $P(x\,,\,y)$ جملة مفتوحة على $A \times B$.

(أ) إذا كان $\exists x \forall y\ P(x\,,\,y)$ تقريراً صائبًا فأثبت أن $\forall y \exists x\ P(x\,,\,y)$ تقرير صائب .

(ب) هل التقرير المعاكس للفقرة (أ) صحيح ؟



الفصل الثالث

طرائق البرهان

METHODS OF PROOF

يُعَدُّ علم الرياضيات من العلوم التي تعتمد كليًا على البراهين. ومنذ أن قدم العالم الرياضي إقليدس (Euclid) أول برهان رياضي في القرن الثالث قبل الميلاد استنفدت ملايين الساعات في قاعات الدراسة في جامعات العالم في برهان وإعادة برهان المبرهنات الرياضية. فعلى سبيل المثال، لو حضرنا محاضرة في فصل دراسي متقدم في قسم الرياضيات في أي جامعة نجد أن هذه المحاضرة تتكون كليًا من تعاريف ومبرهنات وبراهين لهذه المبرهنات. وهنا يكون من الطبيعي أن نتساءل: لماذا كل هذه البراهين؟ وما الحكمة التي يراها الرياضي بإعطاء براهين مختلفة لمبرهنة ما كمبرهنة فيثاغورس (Pythagoras) مثلاً؟

هناك أسباب عديدة لذلك. ومن هذه الأسباب أن البراهين عرضة للنقد وإعادة التقويم من حيث الأخطاء أو عدم الوضوح، وهذا يتم عادة بالنظر إلى البرهان مرة بعد مرة. إن البرهان هو بمثابة الختم الرسمي للمبرهنة، كذلك، فإنه يزيد فهمنا للموضوع ويكشف لنا عن جوهره. إن البراهين تقترح لنا مواضيع رياضية جديدة.

المبرهنة في الرياضيات هي عبارة عن تقرير رياضي صائب وبرهان هذه المبرهنة هو المجادلة المنطقية التي تثبت لنا صحة هذه المبرهنة. ولذلك فإن كتابة برهان صحيح وواضح هو فن بحد ذاته، وهذا يحتاج إلى وقت وتمرين حتى نستطيع أن نكون

قادرين على إتقانه . من أجل فهم البرهان ، يجب علينا أن نفهم الطريقة المستخدمة في هذا البرهان وهذا هو موضوع هذا الفصل من الكتاب ، حيث سنقدم في البند (١ , ٣) بعض الطرائق الأساسية المستخدمة في براهين المبرهنات الرياضية . أما في البند (٣,٢) فسنقدم طريقة البرهان بوساطة الاستقراء الرياضي ، وهي طريقة مهمة جداً وتستخدم في برهان كثير من المبرهنات التي يتضمن منطوقها ذكراً للأعداد الصحيحة .

(٣,١) طرائق بسيطة للبرهان
Elementary Proof Methods

إن تصنيف طرائق البرهان في الرياضيات هو أحد العوامل التي تساعد على فهم طبيعة هذا العلم . إن معظم التقارير الرياضية المهمة هي تقارير شرطية ؛ لذلك ، فإن معظم الأمثلة التي سنعطيها على طرائق البرهان المختلفة ستتعلق بالتقارير الشرطية الشاملة .

(٣,١,١) البرهان المباشر (Direct proof)

ليكن $P \longrightarrow Q$ تقريراً . لإثبات أن $P \longrightarrow Q$ صائب بطريقة البرهان المباشر نفرض أن P صائب ونثبت أن Q صائب . كذلك ، يمكن استخدام فرض مشابه من أجل إثبات صواب التقارير الشرطية الشاملة .

مبرهنة (٣,١)

إذا كان n عدداً فردياً فإن n^2 عدد فردي .

البرهان

نفرض أن n عدد فردي. إذن، ، يوجد عدد صحيح m حيث $n = 2m+1$، ومن ثم، فإن: $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m+1 = 2(2m^2 + 2m)+1$.

أي أن n^2 عدد فردي. Δ

مبرهنة (٣,٢)

إذا كان x و y عددين كسريين فإن xy عدد كسري.

البرهان

نفرض أن x و y عددان كسريان. بما أن x عدد كسري فإنه يوجد $a \in \mathbb{Z}$, $0 \neq b$ حيث $x = \frac{a}{b}$. بالمثل يوجد $c \in \mathbb{Z}$, $0 \neq d$ حيث $y = \frac{c}{d}$ إذن، $xy = \frac{ac}{bd}$. واضح أن $ac \in \mathbb{Z}$, $0 \neq bd$. إذن، xy عدد كسري. Δ

مثال (٣,١)

إذا كان n عددًا فرديًا فإنه يوجد عدد صحيح m حيث $n^2 = 8m+1$.

الحل

نفرض أن n عدد فردي. إذن، يوجد عدد صحيح k حيث $n = 2k+1$، وبالتالي، فإن $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$. بما أن k زوجي أو $k+1$ زوجي فإن $k(k+1)$ زوجي. إذن، يوجد عدد صحيح m حيث $k(k+1) = 2m$ وبالتالي، ، فإن $n^2 = 4(2m)+1 = 8m+1$.

(٣,١,٢) البرهان بوساطة الاستنفاد (Proof by exhaustion)

غالبا ما تستخدم طريقة البرهان بوساطة الاستنفاد لإثبات صواب التقارير الشاملة من الشكل $(\forall x \in A)\ P(x)$ حيث عدد عناصر المجموعة A صغير لدرجة أنه يمكن دراسة التفاصيل في زمن قصير.

مثال (٣,٢)

أثبت أن التقرير (n^2+n+41 عدد أولي) و $\forall n \in \{1,2,3,4\}$ صائبًا.

الحل

$1^2+1+41 = 43$ عدد أولي ،

$2^2+2+41 = 47$ عدد أولي ،

$3^2 + 3 + 41 = 53$ عدد أولي

$4^2+4+41 = 61$ عدد أولي .

إذن ، التقرير المعطى تقرير صائب .

(٣,١,٣) البرهان بوساطة الحالات (Proof by cases)

تستخدم طريقة البرهان بوساطة الحالات عندما نستطيع تقسيم المسألة إلى عدد صغير من الحالات ، ويعتمد التقسيم على المسألة المعالجة .

مثال (٣,٣)

أثبت أن $n^2 + n$ عدد زوجي لكل عدد صحيح $n \geq 0$.

الحل

n عدد صحيح . إذن ، n زوجي أو n فردي .

الحالة (١): نفرض أن n عدد زوجي. إذن، n+1 عدد فردي، وبالتالي، فإن $n^2 + n = n(n+1)$ عدد زوجي.

الحالة (٢): نفرض أن n عدد فردي. إذن، n+1 عدد زوجي، وبالتالي، فإن $n^2 + n = n(n+1)$ عدد زوجي.

مثال (٣,٤)

أثبت أن $x \leq |x|$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

البرهان

الحالة (١): نفرض أن $x \geq 0$. إذن، $|x| = x$ وبالتالي، فإن $x \leq |x|$.

الحالة (٢): نفرض أن $x < 0$. إذن، $|x| = -x$. بما أن $x < 0$ فإن $-x > 0$. إذن، $x < -x$ وبالتالي، فإن $x < |x|$. إذن، $x \leq |x|$.

(٣,١,٤) البرهان بوساطة التناقض (Proof by contradiction)

ليكن P تقريرا. لبرهان صواب P بوساطة التناقض، نفرض أن P خاطىء ونثبت استحالة هذه الفرضية، وذلك عن طريق إثبات أنها تؤدي إلى صواب تقرير من الشكل $Q \wedge \neg Q$ حيث Q تقرير ما ويمكن له أن يكون P أو أية مسلّمة أو مبرهنة معروفة.

مبرهنة (٣,٣)

$\sqrt{2}$ عدد غير كسري.

البرهان

لنتذكر أن $\mathbb{Z}$ ترمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة وأن $\mathbb{Q}$ ترمز إلى مجموعة الأعداد الكسرية. نفرض النقيض، أي نفرض أن $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. إذن، يوجد $a , b \in \mathbb{Z}$ ، $b \neq 0$ حيث $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. ونستطيع أن نفرض أيضًا، أن القاسم المشترك الأعظم للعددين b , a هو 1 . بما أن $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ فإن $a^2 = 2b^2$. إذن، a^2 زوجي وبالتالي، فإن a زوجي . إذن، يوجد $m \in \mathbb{Z}$ حيث $a = 2m$. بالتعويض في $a^2 = 2b^2$ نجد أن $a^2 = 4m^2 = 2b^2$ وبالتالي، فإن $2m^2 = b^2$. بالمثل، نجد أن b زوجي. إذن، 2 قاسم مشترك للعددين a و b . وهذا يناقض الفرض المذكور أعلاه وبالتالي، فإن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Δ

مبرهنة (٣,٤)

إن حاصل ضرب أي عدد كسري غير صفري وأي عدد غير كسري هو عدد غير كسري.

البرهان

نريد إثبات أن $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[(0 \neq x \in \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q}) \longrightarrow xy \notin \mathbb{Q}]$ تقرير صائب. لذلك، نفرض أن $0 \neq x \in \mathbb{Q}$, $y \notin \mathbb{Q}$, $xy \in Q$. بما أن $xy \in \mathbb{Q}$ فإنه يوجد $0 \neq b,a \in \mathbb{Z}$ حيث $xy = \frac{a}{b}$. بالمثل، بما أن $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ فإنه يوجد $0 \neq d,\ 0 \neq c \in \mathbb{Z}$ حيث $x = \frac{c}{d}$ إذن، $y\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}$ وبالتالي، فإن $y = \frac{ad}{bc}$. واضح أن $y = \frac{ad}{bc} \in \mathbb{Q}$ وهذا يناقض $y \notin \mathbb{Q}$. إذن، التقرير المذكور أعلاه صائب. Δ

(٣,١,٥) البرهان بوساطة المكافىء العكسي

(Proof by contraposition)

ليكن $Q \longrightarrow P$ تقريراً. لبرهان صواب $P \longrightarrow Q$، نبرهن أن المكافىء العكسي $\neg Q \longrightarrow \neg P$ صائب. ويمكن استخدام ذلك أيضا لبرهان صواب التقارير الشرطية الشاملة. ومن الجدير بالذكر هنا أنه يمكن اعتبار هذه الطريقة حالة خاصة من البرهان بوساطة التناقض حيث نفرض أن $\neg Q$ صائب ونثبت أن هذا الفرض يؤدي إلى أن $P \wedge \neg P$ صائب.

مثال (٣,٥)

أثبت أنه إذا كان n^2 عدداً زوجيًا فإن n عدد زوجي.

الحل

واضح أن المكافىء العكسي هو: إذا كان n عدداً فرديًا فإن n^2 عدد فردي. وهذا التقرير بُرْهِنَ في المبرهنة (٣,١).

مثال (٣,٦)

أثبت أن التقرير $(\forall x , y \in \mathbb{R}) \big((x+y \geq 2) \longrightarrow (x \geq 1) \vee (y \geq 1) \big)$ صائب.

الحل

نفرض أن $x , y \in \mathbb{R}$ ، $x< 1$ و $y < 1$.

بما أن $x < 1$ و $y < 1$ فإن $x+y < 1 +1$ وبالتالي، فإن $x +y < 2$.

مبرهنة (٣,٥) (مبدأ برج الحمام (Pigeonhole principle))

إذا وضعنا n حمامة في برج حمام عدد عيونه m وكان $n > m$ فإن عيناً واحدة على الأقل، يجب أن تحتوي على حمامتين أو أكثر.

البرهان

إذا فرضنا أن كل عين في برج الحمام تحتوي على حمامة على الأكثر فإننا نستنتج أن عدد الحمامات يجب أن يكون m على الأكثر. Δ

(٣,١,٦) البرهان بوساطة المثال المناقض

(Proof by counterexample)

في كثير من الأحيان، نثبت خطأ تقرير رياضي شامل عن طريق إعطاء مثال مناقض.

مثال (٣,٧)

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن n^2+n+41 عدد أولي.

الحل

مثال مناقض: ليكن $n=41$. عندئذ، $n^2 + n + 41 = (41)^2 + 41 + 41 = (41)(43)$، وهذا عدد مؤلف.

ملاحظات

(١) إذا كان Q تقريراً حيث P تقرير خاطىء فإن $P \longrightarrow Q$ صائب. في هذه الحالة، نقول إن $P \longrightarrow Q$ صائب فراغياً (vacuously true). فمثلا، إذا

كانت A مجموعة فإن $(x\in\phi) \longrightarrow (x\in A)$ تقرير صائب فراغيًا لأن $x\in\phi$ تقرير خاطىء. من هنا، ينتج أن ϕ مجموعة جزئية من A.

(٢) إذا كان Q تقريرًا حيث Q تقرير صائب فإن $P \longrightarrow Q$ صائب. في هذه الحالة، نقول إن $P \longrightarrow Q$ صائب بشكل تافه (trivially true). فمثلا إذا كان $x\in\mathbb{R}$ فإن التقرير $(x\in\mathbb{Q}) \longrightarrow [(x\in\mathbb{Z}) \vee (x\notin\mathbb{Z})]$ صائب بشكل تافه لأن $(x\in\mathbb{Z}) \vee (x\notin\mathbb{Z})$ صائب.

(٣) لبرهان صواب التقرير $P \longleftrightarrow Q$، فإننا نبرهن أن $P \longrightarrow Q$ صائب ونبرهن أن $Q \longrightarrow P$ صائب. في كثير من الأحيان، نقرأ $P \longrightarrow Q$ كما يلي: P شرط كاف لـ Q، كما نقرأه: Q شرط لازم لـ P. وبالمثل، نقرأ $P \longleftrightarrow Q$ كمايلي: P شرط لازم وكاف لـ Q.

تمارين (٣,١)

(١) أعط برهانًا مباشرًا لما يلي: إذا كان n عددًا زوجيًا فإن n^2 عدد زوجي.

(٢) أعطِ برهانًا مباشرًا لمايلي: إذا كان n عددًا صحيحًا غير قابل للقسمة على العدد 3 فإن n^2+2 يقبل القسمة على العدد 3.

(٣) أعط برهانًا مباشرًا لما يلي: إذا كان x، y عددين حقيقيين فإن $|x+y| \leq |x|+|y|$.

(٤) إذا كان x عددًا حقيقيًا وكان $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ فإن $x = 1$. أثبت صواب التقرير السابق بوساطة.

(أ) برهان مباشر (ب) المكافىء العكسي (جـ) التناقض.

(٥) أعط برهانًا مباشرًا لما يلي: إذا كان $x^2 - 4 = 0$ فإن $x = 2$ أو $x = -2$.

(٦) استخدم التناقض لبرهان كل ممايلي:

(أ) $\sqrt{3}$ عدد غير كسري. (ب) $\sqrt[3]{2}$ عدد غير كسري.

(جـ) $Log_2 5$ عدد غير كسري .

(٧) إذا كان x , y عددين فرديين فإن $x+y$ عدد زوجي .
أثبت صواب التقرير السابق بوساطة .
(أ) البرهان المباشر (ب) التناقض .

(٨) استخدم المكافيء العكسي لبرهان مايلي :
إذا كان $x^2+y^2=z^2$ حيث $x , y , z \in \mathbb{Z}$ فإنه يجب أن يكون على الأقل واحد من الأعداد x, y, z زوجيًا.

(٩) أثبت أن التقرير التالي صائب أو أعط مثالاً مناقضًا إذا كان خاطئًا : مجموع أي عددين غير كسريين عدد غير كسري .

(١٠) أعط مثالا مناقضا لمايلي : كل عدد أولي يجب أن يكون فرديًا .

(١١) أعط مثالاً مناقضًا لما يلي : لايوجد عدد صحيح $n > 100$ حيث يكون العددان n و $n+2$ أولَيين .

(١٢) عالج المسألة التالية بوساطة التناقض : إذا كان x و y عددين حقيقيين فإن $|x+y| \leq \max\{2|x|, 2|y|\}$.

(١٣) أثبت أن مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية .

(١٤) أثبت أنه إذا كان p عددًا أوليًا فإن $\sqrt{p}$ عدد غير كسري .

(١٥) أثبت أنه إذا كان x عددًا كسريًا غير صفري وكان y عددًا غير كبسري فإن xy عدد غير كسري .

(١٦) أثبت أنه إذا كان x عددًا كسريًا وكان y عددًا غير كسري فإن $x+y$ عدد غير كسري .

(١٧) استخدم التناقض لإثبات أن $x+\frac{1}{x} \geq 2$ لكل عدد حقيقي $x>0$.

(١٨) استخدم طريقة البرهان بوساطة الحالات لإثبات أن $|x+y| \leq |x|+|y|$ لكل $x , y \in \mathbb{R}$.

(١٩) استخدم طريقة البرهان بوساطة الحالات لإثبات أن $|xy| = |x|\,|y|$ لكل $x , y \in \mathbb{R}$.

(٣,٢) الاستقراء الرياضي
Mathematical Induction

الاستقراء الرياضي طريقة فعّالة لبرهان صواب الكثير من التقارير الشاملة، وغالبًا ماتستخدم هذه الطريقة لإثبات المبرهنات وحل المسائل التي تتعلق بالأعداد الصحيحة. سنقدم في هذا البند شكلين متكافئين لمبدأ الاستقراء الرياضي، كذلك سنعطي أمثلة متنوعة حول الموضوع.

(١,٢,٣) المبدأ الأوّل للاستقراء الرياضي
The first principle of mathematical induction

ليكن m عددًا صحيحًا ولتكن P(n) جملة مفتوحة على $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq m\}$.

نفرض أن:

(١) P(m) تقرير صائب،

(٢) لكل عدد صحيح $k \geq m$، إذا كان P(k) تقريرًا صائبًا فإن P(k+1) تقرير صائب.

عندئذ، $(\forall n \in A)\ P(n)$ تقرير صائب.

الخاصة (١) المذكورة أعلاه تُعرف عادة، بالخطوة الأساسية والخاصة (٢)

تعرف بخطوة الاستقراء، أما الفرضية في (٢) فإنها تسمى فرضية الاستقراء. ونريد التأكيد على أنه عند استخدامنا طريقة الاستقراء الرياضي فإننا نتحقق من الشرطين (١) و (٢) ولا يكفي التحقق من أحدهما. الخطوة الأساسية تفيدنا بأن $P(m)$ تقرير صائب، وبتطبيق خطوة الاستقراء من أجل $k=m$ نجد أن $P(m+1)$ تقرير صائب؛ نستطيع الآن أن نطبق خطوة الاستقراء مرة أخرى لنثبت أن $P(m+2)$ تقرير صائب وهلم جرا.

مثال (٣,٨)

أثبت أن $1 + 2 + 3 +\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$.

الحل

لنفرض أن الجملة المفتوحة $P(n)$ هي:

$$1 + 2 + 3 +\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الخطوة الأساسية:

بما أن $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ فإن $P(1)$ تقرير صائب.

خطوة الاستقراء:

لنفرض أن $P(k)$ تقرير صائب حيث $k \geq 1$، أي أن $1 + 2 + 3 +\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن:

$$1 + 2 + 3 +\dots+k+ (k+1) = \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1)$$

ولكن

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

إذن،

$$1 + 2 + ... + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

وبالتالي، فإن $P(k+1)$ تقرير صائب.

مثال (٣,٩)

أثبت أن $2^n < n!$ لكل عدد صحيح $n \geq 4$.

الحل

لنفرض أن الجملة المفتوحة $P(n)$ هي $2^n < n!$.

الخطوة الأساسية:

بما أن $24 = 4! > 2^4 = 16$ فإن $P(4)$ تقرير صائب.

خطوة الاستقراء:

لنفرض أن $P(k)$ تقرير صائب، حيث $k \geq 4$، أي أن $2^k < k!$.

باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن:

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k < 2\,(k!) < (k+1)\,(k!) = (k+1)!.$$

وبالتالي، فإن $P(k+1)$ تقرير صائب.

مثال (٣,١٠)

أثبت أن $n^3 - 4n + 6$ يقبل القسمة على 3 (بدون باق) لكل عدد صحيح $n \geq 0$.

الحل

لنفرض أن الجملة المفتوحة P(n) هي :

$n^3 - 4n + 6$ يقبل القسمة على 3.

الخطوة الأساسية :

بما أن (2) (3) = 6 فإن P(0) تقرير صائب .

خطوة الاستقراء :

لنفرض أن P(k) تقرير صائب حيث $k \geq 0$، أي أنه يوجد عدد صحيح m حيث $k^3 - 4k + 6 = 3m$. باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - 4(k+1) + 6 &= k^3 + 1 + 3k^2 + 3k - 4k - 4 + 6\\ &= (k^3 - 4k + 6) + 3k^2 + 3k - 3\\ &= 3m + 3k^2 + 3k - 3\\ &= 3(m + k^2 + k - 1)\end{aligned}$$

وبالتالي، فإن P(k+1) تقرير صائب .

ملاحظة

إذا كانت A مجموعة فإننا نرمز لعدد عناصر A بالرمز |A|، كذلك، فإننا نرمز لمجموعة القوة لـ A (أي مجموعة المجموعات الجزئية لـ A) بالرمز 2^A.

مثال (٣,١١)

أثبت أنه لكل عدد صحيح $n \geq 0$، أية مجموعة عدد عناصرها n يكون عدد مجموعاتها الجزئية 2^n.

الحل

لنفرض أن الجملة المفتوحة $P(n)$ هي :

أية مجموعة عدد عناصرها n يكون عدد مجموعاتها الجزئية 2^n .

الخطوة الأساسية :

إذا كانت X مجموعة حيث $|X| = 0$ فإن $X = \phi$. إذن، $2^X = \{\phi\}$، وبالتالي، فإن $|2^X| = 1 = 2^0$. إذن، $P(0)$ تقرير صائب .

خطوة الاستقراء :

لنفرض أن $P(k)$ تقرير صائب حيث $k \geq 0$، أي أن أية مجموعة عدد عناصرها k يكون عدد مجموعاتها الجزئية 2^k .

لتكن X مجموعة حيث $|X| = k+1$. نختار عنصراً $a \in X$ ونعتبر المجموعة $X-\{a\}$. واضح أن $|2^{(X-\{a\})}| = 2^k$. إذا كانت $Y \subseteq X$ فإن $a \in Y$ أو $a \notin Y$. ضع

$$A = \{Y : Y \subseteq X , a \notin Y\}$$

$$B = \{Y : Y \subseteq X , a \in Y\}$$

واضح أن $A = 2^{(X-\{a\})}$، $A \cap B = \phi$، وبالتالي، فإن $|2^X| = |A| + |B| = 2^k + |B|$. الآن نحسب $|B|$. من أجل ذلك، نعرف التطبيق $f : A \longrightarrow B$ كما يلي :

$f(Y) = Y \cup \{a\} , \quad \forall Y \in A$. واضح أن f تطبيق أحادي وشامل (أثبت ذلك)، وبالتالي، فإن $|B| = |A| = 2^k$. إذن، $|X^2| = 2^k + |B| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$. وبالتالي، فإن $P(k+1)$ تقرير صائب .

(٣,٢,٢) المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي

The second principle of mathematical induction

ليكن m عددًا صحيحًا ولتكن P(n) جملة مفتوحة على $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq m\}$
ليكن t عددًا صحيحًا حيث $t \geq 0$. نفرض أن

(١) $P(m)$, $P(m+1)$,..., $P(m+t)$ تقارير صائبة،

(٢) لكل عدد صحيح $k \geq m+t$، إذا كانت $P(m)$, $P(m+1)$, ..., $P(k)$ تقارير صائبة فإن $P(k+1)$ تقرير صائب.

عندئذ، $(\forall n \in A)\ P(n)$ تقرير صائب.

مثال (٣,١٢)

أثبت أنه لكل عدد صحيح $n \geq 2$، إما أن يكون n عددًا أوليًا أو يساوي حاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية.

الحل

لنفرض أن الجملة المفتوحة P(n) هي:

n عدد أولي أو n يساوي حاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية.

نستخدم المبدأ الثاني الاستقراء الرياضي بأخذ $t = 0$.

الخطوة الأساسية:

بما أن 2 عدد أولي فإن P(2) تقرير صائب.

خطوة الاستقراء:

لنفرض أن $P(2)$, $P(3)$, ..., $P(k)$ تقارير صائبة حيث $k \geq 2$.

سنثبت أن $P(k+1)$ تقرير صائب. واضح أنه إذا كان $k+1$ عددًا أوليًا فإن $P(k+1)$

تقرير صائب. أما إذا كان k+1 عدداً مؤلفاً (أي غير أولي) فإنه يوجد عددان صحيحان a,b حيث $k+1=ab$ ، $2 \le a \le k$ ، $2 \le b \le k$. باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن a عدد أولي أو حاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية. بالمثل، إن b عدد أولي أو حاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية.

إذن، k+1 يساوي حاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية، وبالتالي، فإن P(k+1) تقرير صائب.

مثال (٣,١٣)

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية فيبوناتشي (Fibonacci) ، وهي مُعرفة ارتداديا كما يلي: $a_1 = 1$ و $a_2 = 1$ و $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ لكل عدد صحيح $n \ge 3$.

أثبت أن $a_n \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ لكل عدد صحيح $n \ge 1$.

الحل

لنفرض أن الجملة المفتوحة P(n) هي: $a_n \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي بأخذ $t = 1$.

الخطوة الأساسية:

بما أن $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \le 1$ فإن P(1) تقرير صائب. كذلك بما أن $1 \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

فإن P(2) تقرير صائب.

خطوة الاستقراء:

لنفرض أن P(1) , P(2) , ..., P(k) تقارير صائبة حيث $k \ge 2$.

سنبرهن أن $P(k+1)$ تقرير صائب. من تعريف المتتالية نجد أن $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$

باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن $a_{k-1} \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$ و $a_k \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$. إذن،

$a_{k+1} \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$ وبالتالي، فإن $a_{k+1} \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right)$

ولـــكـــن $\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$. إذن، $a_{k+1} \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

وبالتالي، فإن $a_{k+1} \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$. إذن، $P(k+1)$ تقرير صائب.

مثال (٣,١٤)

لتكـــن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية معرفة ارتداديًا كما يلي $a_0 = 1$ و $a_1 = 1$ و $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ لكل عدد صحيح $n \ge 2$. أثبت أن a_n عدد فردي لكل عدد صحيح $n \ge 0$.

الحل

لنفرض أن الجملة المفتوحة $P(n)$ هي: a_n عدد فردي.

نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي بأخذ $t = 0$.

الخطوة الأساسية:

بما أن $a_0 = a_1 = 1$ عدد فردي فإن كلا من $P(0)$ و$P(1)$ تقرير صائب.

خطوة الاستقراء:

لنفرض أن $P(0), P(1), ..., P(k)$ تقارير صائبة حيث $k \ge 1$.

سنبرهن أن $P(k+1)$ تقرير صائب. من تعريف المتتالية نجد أن $a_{k+1} = 2a_k + a_{k-1}$. واضح أن $2a_k$ عدد زوجي. وبالاستناد إلى فرضية الاستقراء نجد أن a_{k-1} عدد فردي.

إذن، a_{k+1} عدد فردي، وبالتالي، فإن $P(k+1)$ تقرير صائب.

هناك مبدأ آخر مكافىء لمبدأ الاستقراء الرياضي يُعرف بمبدأ الترتيب الحسن ونقبله كمسلَّمة.

(٣,٢,٣) مبدأ الترتيب الحسن (Well-ordering principle)

إذا كانت A مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة غير السالبة فإنه يوجد عنصر أصغر في A. أي يوجد عنصر $a \in A$ حيث $a \le x$ لكل $x \in A$.

ملاحظات

(١) بالاستناد إلى مبدأ الترتيب الحسن، نجد أنه إذا كان m عدداً صحيحاً وكانت A مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة $\{n \in \mathbb{Z} : n \ge m\}$ فإنه يوجد عنصر أصغر في A.

(٢) من الممكن تعديل نص مبدأ الاستقراء الرياضي ليناسب بعض المسائل.

فمثلاً: ليكن $m , r \in \mathbb{Z}$ ولتكن $P(n)$ جملة مفتوحة على المجموعة المنتهية $A = \{n \in \mathbb{Z} : m \le n \le r\}$. من الممكن إجراء تغييرات بسيطة ومناسبة في نص مبدأ الاستقراء الرياضي حيث نستطيع استخدام النص الجديد في إثبات أن $(\forall n \in A, P(n))$ تقرير صائب.

مثال (٣,١٥)

أثبت أن $2^{n+1} < 1 + (n+1) 2^n$ لكل عدد صحيح $n \ge 1$.

الحل

نريد إثبات $\forall n \in \{1,2,...\} , 2^{n+1} < 1 + (n+1) 2^n$ تقرير صائب.

نفرض النقيض، أي أن $\exists\, n \in\{1,2,...\}\ ,\ 2^{n+1} \geq 1 + (n+1)\, 2^n$ تقرير صائب.

من هنا، ينتج أن $S = \{\, x\in\{1,2,...\}:\ 2^{n+1} \geq 1 + (n+1)\, 2^n \}$ ليست المجموعة الخالية. بالاستناد إلى مبدأ الترتيب الحسن، نجد أنه يوجد في S عنصر أصغري m . إذن،

$$(1)\qquad 2^{m+1} \geq 1 + (m+1)\, 2^m$$

و

$$(2)\qquad 2^m < 1 + m\, 2^{m-1}$$

بضرب (2) بالعدد 2 نجد أن $2^{m+1} < 2 + m\, 2^m$. باستخدام هذه المتباينة والمتباينة (1)، نجد أن $2+m\, 2^m > 1+(m+1)\, 2^m$ وبالتالي، فإن $1>2^m$. إن هذا يتناقض مع $1< 2^k$ لكل عدد صحيح $k \geq 1$.

تمارين (٣,٢)

استخدم الاستقراء الرياضي لبرهان صواب كل من التقارير التالية:

(١) $1^2+ 2^2+...+ n^2= n\,(n+1)\,(2n+1)/6\ ,\ \forall n \geq 1$.

(٢) $1^3 +2^3+ ...+ n^3=[n\,(n+1)/2]^2\ ,\ \forall n \geq 1$

(٣) $1 + 4 + 7 + ...+ (3n-2) = n\,(3n-1) / 2,\ \forall n \geq 1$.

(٤) $1^2+3^2+ ...+ (2n-1)^2 = n\,(2n-1)\,(2n+1)/3\ ,\ \forall n \geq 1$.

(٥) $1\times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4+ ...+ n\,(n+1)\,(n+2) = n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)/4,\ \forall n \geq 1$

(٦) $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})...(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\quad ,\ \forall n \geq 1$.

(٧) $\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5}+ ...+ \frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}\ ,\ \forall n \geq 1$.

(٨) $2^n > n^2,\ \forall\, n \geq 5$

(٩) $n! > n^2,\ \forall\, n \geq 4$

(١٠) $1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ لكل عدد صحيح موجب n وكل عدد حقيقي $r \neq 1$..

(١١) $n(n+1)(n+2)$ يقبل القسمة على العدد 6 .

(١٢) إذا كانت المتتالية (x_n) معرفة كالتالي: $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ ، $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ لكل $n \geq 1$ فأثبت أن $1 \leq x_n \leq 2$.

(١٣) إذا كانت المتتالية (y_n) معرفة كالتالي: $y_1 = 1$ ، $y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$ لكل $n \geq 1$ فأثبت أن:

(أ) $y_n < 2$ لكل $n \geq 1$.

(ب) $y_n < y_{n+1}$ لكل $n \geq 1$.

(١٤) إذا كانت المتتالية (y_n) معرفة كالتالي: $y_1 = 1$ ، $y_{n+1} = \sqrt{2y_n}$ لكل $n \geq 1$ أثبت أن $1 \leq y_n < 2$ لكل $n \geq 1$.

(١٥) $\forall n \geq 1$ ، $5^n - 4n - 1$ يقبل القسمة على 16 .

(١٦) $\forall n \geq 1$ ، $7^n - 2^n$ يقبل القسمة على 5 .

(١٧) $\forall n \geq 1$ ، $n^5 - n$ يقبل القسمة على 10 .

(١٨) $\forall n \geq 1$ ، $n(n^2 + 5)$ يقبل القسمة على 6 .

(١٩) $\forall n \geq 1$ ، $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ يقبل القسمة على 5 .

(٢٠) $\forall n \geq 2$ ، $n^3 > 2n + 1$.

(٢١) $\forall n \geq 2$ ، $n^2 > n + 1$.

(٢٢) $\forall n \geq 2$ ، $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

(٢٣) إذا كانت المتتالية (a_n) معرفة كما يلي $a_1 = 3$ ، $a_2 = 6$ ، ، $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ لكل

$n \ge 3$ ، فأثبت أن a_n يقبل القسمة على 3 لكل $n \ge 1$.

(٢٤) إذا كانت المتتالية (a_n) معرفة كما يلي $a_0=2$ ، $a_1=4$ ، $a_2=6$

$a_n = 5\, a_{n-3}$ لكل $n \ge 3$ ، فأثبت أن a_n عدد زوجي لكل $n \ge 0$.

(٢٥) إذا كانت المتتالية (b_n) معرفة كما يلي: $b_0=1$ ، $b_1=2$ ، $b_2=3$ ،

$b_n = b_{n-1}+b_{n-2}+b_{n-3}$ لكل $n \ge 3$ فأثبت أن $b_n < 3^n$ لكل $n \ge 1$.

(٢٦) أثبت أن $(1-x)\,(1+x)\,(1+x^2)\,(1+x^4)\,\dots\,(1+x^{2n}) = 1-x^{2^{n+1}}$

لكل $x \in \mathbb{R}$ $n \ge 0$.

(٢٧) استخدم التناقض ومبدأ الترتيب الحسن لبرهان صواب كل من التقارير التالية :

(أ) $(\forall n \ge 1)\ n < 2^n$.

(ب) $(\forall n \ge 3)\ n < 2^n - 1$.

(جـ) $(\forall n \ge 3)\ 2n + 1 < 2^n$.

الفصل الرابع

العلاقـــــات
RELATIONS

(٤,١) تعاريف أساسية وأمثلة
Basic Definitions and Examples

تعريف (٤,١)

إذا كانت A و B مجموعتين وكانت R مجموعة جزئية من $A \times B$ فإننا نسمي R علاقة ثنائية من المجموعة A إلى المجموعة B . إذا كان $(a, b) \in R$ فإننا نقول إن العنصر a مرتبط بالعنصر b ونرمز لذلك بالرمز aRb ، أما إذا كان $(a, b) \notin R$ فإننا نقول إن العنصر a غير مرتبط بالعنصر b ونرمز لذلك بالرمز $a \not R b$. وفي الحالة الخاصة ، عندما تكون $A = B$ فإننا نقول إن R علاقة على المجموعة A . ونعرف مجال العلاقة R بأنه المجموعة $\{a \in A: (a,b) \in R, \ b \in B\}$. أما مدى العلاقة R فهو $\{b \in B: (a,b) \in R, \ a \in A\}$.

مثال (٤,١)

لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$. ولتكن العلاقة R من A إلى B

معرفة كالتالي : aRb إذا وفقط إذا كان a يقسم b . أكتب R على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة وجد مجالها ومداها .

الحل

$R= \{ (1,4) , (1,5) , (1,6) , (2,4) , (2,6) , (3,6) \}$

مجال R هو $\{ 1 , 2 , 3 \}$ ومداها $\{ 4 , 5 , 6 \}$.

تعريف (٢,٤)

إذا كانت R علاقة على المجموعة A فإن :

(١) *R انعكاسية (reflexive) إذا كان aRa لكل $a \in A$.*

(٢) *R تناظرية (symmetric) إذا تحقق الشرط التالي :*

إذا كان aRb فإن bRa لكل $a , b \in A$.

(٣) *R تخالفية (antisymmetric) إذا تحقق الشرط التالي :*

إذا كان aRb و bRa فإن $a = b$ لكل $a , b \in A$.

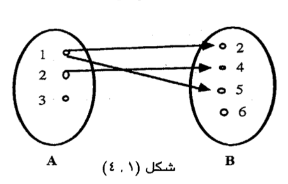
(٤) *R متعدية (transitive) إذا تحقق الشرط التالي :*

إذا كان aRb و bRc فإن aRc لكل $a , b , c \in A$.

(٥) *R مترابطة (connected) إذا كان aRb أو bRa لكل $a , b \in A$ حيث $a \neq b$.*

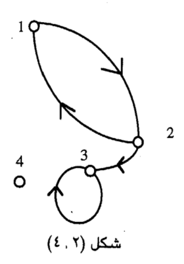
ملاحظات

(١) إذا كانت R علاقة من A إلى B وكان كل من |A| و |B| صغيراً نسبيًا فإننا نمثل R بشكل يسمى " الشكل السهمي للعلاقة R " ونحصل عليه كمايلي : نستخدم أشكال فن لتمثيل كل من A و B ثم نرسم سهمًا من x إلى y إذا وفقط إذا كان xRy . فمثلا إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ ، $B=\{2,4,5,6\}$ ، $R=\{(1,2),(1,5),(2,4)\}$ فإن الشكل السهمي للعلاقة R هو



شكل (٤ . ١)

(٢) إذا كانت R علاقـة على المجمـوعة A وكان |A| صـغيراً نسـبيًا فإننا بإجـراء تعـديل على الشكل السـهـمي للعـلاقـة R ، نحـصل على رسـم يسـمى " الرسم الموجَّه للعلاقـة R " . فبـدلاً من رسم A مرتين نرسـمهـا مرة واحـدة ثم نرسم سـهـمًا من x إلى y إذا وفقط إذا كـان xRy . يسـمى كل سـهم ضـلعًا موجـهًا كما يسـمى كل سـهم مرسوم من عنصر إلى نفسه عروة . فمثلاً إذا كـانت $A = \{1,2,3,4\}$ وكـانت $R = \{(1, 2) , (2 , 1) (2 , 3) , (3, 3)\}$ فـإن الرسم الموجه للعلاقة R هو



شكل (٤ . ٢)

(٣) إذا كانت R علاقة على A وسمينا النقاط المثلة لعناصر A في الرسم الموجه للعلاقة R رؤوسًا فإن R انعكاسية إذا وفقط إذا وجدت عروة عند كل رأس. بالمثل، يمكن إعطاء تفسيرات للصفات الأخرى للعلاقة من رسمها الموجه.

مثال (٤,٢)

لتكن R هي العلاقة المعرفة على المجموعة A كما يلي:
aRb إذا وفقط إذا كان $a = b$ لكل $a , b \in A$. العلاقة R انعكاسية، تناظرية، تخالفية ومتعدية.

تسمى هذه العلاقة العلاقة القطرية (diagonal relation) على A. واضح أن $R = \{(a, a) : a \in A\}$.

مثال (٤,٣)

لتكن A مجموعة ما والعلاقة R معرفة على A كالتالي:
aRb لكل $a , b \in A$. العلاقة R انعكاسية، تناظرية، متعدية ومترابطة.
تسمى هذه العلاقة بالعلاقة التامّة (complete relation) على A. واضح أن $R=A \times A$.

مثال (٤,٤)

لتكن $\mathbb{Z}^*$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير الصفرية ولتكن R علاقة على $\mathbb{Z}^*$ معرفة كالتالي: mRn إذا وفقط إذا كان $m|n$ لكل $m , n \in \mathbb{Z}^*$، حيث $m|n$ تعني أن m يقسم n (أي أنه يوجد عدد صحيح k حيث $n= km$).

بين ما إذا كانت R انعكاسية، تناظرية، تخالفية، متعدية ومترابطة.

الحل

(١) بما أن $m=(1)(m)$ فإن $m|m$ لكل $m \in \mathbb{Z}$. وبالتالي، فإن R انعكاسية .

(٢) لاحظ أن $2|4$ ولكن $4 \nmid 2$ وعليه، فإن R ليست تناظرية .

(٣) لاحظ أن $2|-2$ و $-2|2$ ولكن $2 \neq -2$ وعليه فإن R ليست تخالفية .

(٤) لنفـرض أن $m, n, k \in \mathbb{Z}^*$ حـيث $m|n$ و $n|k$. ومنه، نسـتطيع إيجـاد $c, d \in \mathbb{Z}^*$ حيث $n = mc$ و $k = nd$.وعليه، فإن $k = nd = (mc)d = m(cd)$.

أي أن $m|k$ وبالتالي، فإن R متعدية .

(٥) لاحظ أن $7 \nmid 3$ و $3 \nmid 7$ ، أي أن R ليست مترابطة .

مثال (٤,٥)

إذا استبدلنا المجموعة $\mathbb{Z}^*$ في المثال (٤,٤) بالمجموعة $\mathbb{Z}^+$ فإن العلاقة المعرفة في المثال تكون تخالفية (لماذا؟) .

تعريف (٤,٣)

ليكن k عددًا صحيحًا موجبًا وليكن $a, b \in \mathbb{Z}$. نقول إن a يطابق b قياس k ونكتب $a \equiv b \pmod{k}$ إذا كان $k|(a-b)$ ، وتسمى هذه بعلاقة التطابق قياس k .

مثال (٤,٦)

بين أن علاقة التطابق قياس k انعكاسية وتناظرية ومتعدية .

الحل

(١) بما أن $k|(a-a)=0$ لكل $a \in \mathbb{Z}$ فإن $a \equiv a \pmod k$.

(٢) إذا كان $a \equiv b \pmod k$ فإن $k|a-b$. أي أنه يوجد عدد صحيح m حيث $a-b=km$، ومنه، نجد أن $b-a=(-m)k$، أي أن $k|b-a$ وبالتالي $b \equiv a \pmod k$.

(٣) إذا كان $a \equiv b \pmod k$ و $b \equiv c \pmod k$ فإنه يوجد عددان صحيحان m وn حيث $a-b=mk$ و $b-c=nk$.

الآن :

$$a-c=(a-b)+(b-c)=mk+nk=(m+n)k.$$

أي أن $k|(a-c)$ وبالتالي، فإن $a \equiv c \pmod k$.

مثال (٤,٧)

إذا كانت $\mathbb{Q}$ هي مجموعة الأعداد الكسرية وكانت العلاقة R معرفة على $\mathbb{Q}$ كالتالي : aRb إذا وفقط إذا كان $a \le b$ لكل $a, b \in \mathbb{Q}$ فإنه من السهل أن نبين أن R انعكاسية، تخالفية، متعدية ومترابطة.

تعريف (٤,٤)

(١) *لتكن R علاقة من A إلى B. نعرف العلاقة R^{-1} من B إلى A كما يلي :* $R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}$. *نسمي R^{-1} العلاقة العكسية (inverse) للعلاقة R.*

(٢) *لتكن R علاقة على المجموعة A. نعرف العلاقة R^c على A كما يلي :*

$a\,R^c\,b$ إذا وفقط إذا كان aRb لكل $a , b \in A$. نسمي R^c العلاقة المتممة (compement) للعلاقة R.

مثال (٤,٨)

إذا كانت $A = \{ 1 , 2 , 3 \}$ وكانت R علاقة على A معرفة كما يلي :

$R = \{ (1,2) , (1,3) , (2,2) , (3,2) \}$، فإن $R^{-1} = \{ (2,1) , (3,1) , (2,2) , (2,3) \}$، وإن $R^c = \{(1,1),(2,1), (2,3),(3,1),(3,3)\}$.

تعريف (٤,٥)

لتكن S و R علاقتين على المجموعة A.

(١) نرمز لاتحاد (union) S و R بالرمز $R \cup S$ ويعرف كالتالي :

$R \cup S = \{(a,b) : (a,b) \in R$ أو $(a,b) \in S\}$.

(٢) نرمز لتقاطع (intersection) R و S بالرمز $R \cap S$ ويعرف كاالي :

$R \cap S = \{ (a,b) : (a,b) \in R$ و $(a,b) \in S\}$.

(٣) إذا كانت $R \subseteq A \times B$ و $S \subseteq B \times C$ فإننا نعرف علاقة جديدة $RoS \subseteq A \times C$ كمايلي : $a\,RoS\,c$ إذا وفقط إذا كان يوجد $b \in B$ حيث $a\,R\,b$ و $b\,S\,c$.

تسمى $R\,o\,S$ تحصيل (composition) R و S.

مثال (٤,٩)

إذا كانت $A = \{1 , 2 , 3 \}$، $R = \{ (2) , (2,3) , (3,2) \}$،

$S = \{(1,1) , (2,1) , (3,2)\}$ فإن :

$R \cap S = \{(3,2)\}$، $R \cup S = \{(1,1) , (1,2) , (2,1) , (2,3) , (3 , 2)\}$ ،

$RoS = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1)\}$ ، $SoR = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$.

مبرهنة (٤,١)

لتكن A, B, C, D مجموعات ولتكن $R \subseteq A \times B$ ، $S \subseteq B \times C$ و $T \subseteq C \times D$ علاقات . عندئذ : $R o (SoT) = (RoS)oT$.

البرهان

ليكن $(x, y) \in Ro(SoT)$. إذن، يوجد z حيث $(x, z) \in R$ و $(z, y) \in SoT$ بما أن $(z, y) \in SoT$ فـإنه يوجـد u حـيث $(z, u) \in S$ و $(u, y) \in T$. إذن، $(x, u) \in RoS$ وبالتـالي، فـإن $(x, y) \in (RoS) oT$. إذن، $Ro(SoT) \subseteq (RoS) oT$ بالمثل، $(RoS) oT \subseteq Ro(S oT)$ (أثبت ذلك) . Δ

مبرهنة (٤,٢)

إذا كانت R, S, T, U علاقات حيث $R \subseteq T$ و $S \subseteq U$ فإن $RoS \subseteq ToU$.

البرهان

ليكن $(a,b) \in RoS$. إذن، يوجـد c حـيث $(a,c) \in R$ و $(c,b) \in S$. بما أن $R \subseteq T$ فـإن $(a,c) \in T$ وبما أن $S \subseteq U$ فـإن $(c,b) \in U$. إذن، $(a,b) \in ToU$ وبالتـالي، فـإن $RoS \subseteq ToU$. Δ

مبرهنة (٤,٣)

لتكن R علاقة على المجموعة A . عندئذ :

(أ) *R انعكاسية إذا وفقط إذا كان* $\{(a,a): a \in A\} \subseteq R$.

(ب) *R تناظرية إذا وفقط إذا كان* $R = R^{-1}$.

(جـ) R *تخالفية إذا وفقط إذا كان* $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a,a): a\in A\}$.

(د) R *متعدية إذا وفقط إذا كان* $RoR \subseteq R$.

البرهان

نترك براهين (أ)، (ب) و (جـ) للقارىء كتمارين. لإثبات (د)، نفرض أن R متعدية وأن $(x,y) \in RoR$. إذن، يوجد z حيث $(z,y)\in R$, (x,z) . بما أن R متعدية فإن $(x,y) \in R$ وبالتالي، فإن $RoR \subseteq R$. الآن نفرض أن $RoR \subseteq R$ وأن $(y,z)\in R$, (x,y) . إذن، $(x,z)\in RoR$ وبالتالي، فإن $(x, z) \in R$. إذن، R متعدية. Δ

تعريف (٤,٦)

لتكن R علاقة على المجموعة A. لكل عدد صحيح $n \geq 1$ *نعرف* R^n *ارتداديا كما يلي:*

(١) $R^1=R$.

(٢) $R^{n+1} = R^n \, o R$.

مبرهنة (٤,٤)

لتكن R علاقة على المجموعة A . عندئذ، لكل عدد صحيح $m \geq 1$ *ولكل عدد صحيح* $n \geq 1$، *إن:*

(١) $R^m \, o \, R^n = R^{m+n}$

(٢) $R^m \, o \, R^n = R^n \, o \, R^m$

(٣) $(R^m)^n = R^{mn}$

البرهان

(١) نستخدم الاستقراء الرياضي على n . إذا كان n=1 فإن

$R^m oR^1 = R^m oR = R^{m+1}$ وذلك من التعريف (٤,٦). الآن نفرض أن المطلوب صحيح من أجل k حيث $k \geq 1$ عدد صحيح. بالاستناد إلى التعريف (٤,٦) والمبرهنة (٤,١) وفرض الاستنتاج نجد أن

. $R^m oR^{k+1} = R^m o(R^k oR) = (R^m oR^k)oR = (R^{m+k})oR = R^{m+k+1}$

(٢) من (١)، ينتج أن $R^m oR^n = R^{m+n}$ وأن $R^n oR^m = R^{n+m}$. ولكن $m+n=n+m$. إذن، ينتج المطلوب.

(٣) نترك البرهان للقارىء (**إرشاد** : استخدم الاستقراء الرياضي على n والتعريف (٤,٦) و (١)). Δ

مبرهنة (٤,٥)

لتكن R علاقة على المجموعة A. ليكن $a, b \in A$ وليكن n عدداً صحيحاً موجباً. عندئذ، إن $(a,b) \in R^n$ إذا وفقط إذا وجد $x_0, x_1, ..., x_n \in A$ حيث $x_0=a$ و $x_n=b$ ، $x_0R\, x_1 \;, x_1\, R\, x_2, ..., x_{n-1}\, R\, x_n$.

البرهان

أولا، نفرض أن $(a,b) \in R^n$. نستخدم الاستقراء الرياضي على n. إذا كان $n=1$ فإن $(a,b) \in R^1$، ولكن $R^1 = R$. إذن، $(a,b) \in R$ وبالتالي، فإن aRb. الآن نفرض أن المطلوب صحيح من أجل k، حيث k عدد صحيح موجب. ليكن $(a,b) \in R^{k+1}$. بما أن $R^{k+1} = R^k\, oR$ فإنه يوجد $c \in A$ حيث $(a,c) \in R^k, \;\; (c,b) \in R$

بإستخدام فرض الاستقراء نجد أنه يوجد $x_0, x_1, ..., x_k \in A$ حيث $x_0 = a$، $x_k = c$ و $x_0R\;\, x_1, \;\, x_1\, R\, x_2, ..., x_{k-1}\, R\, x_k$. إذن، إذا وضعنا $x_{k+1} = b$ فإن تحقق $x_0 = a$ و $x_{k+1} = b$ و $x_0\; R\, x_1 \;, \; x_1 R\, x_2, ..., x_{k+1} R\, x_{k+1}$.

ثانيًا، نفرض أنه يوجد $x_0, x_1, ..., x_n \in A$ حيث $x_0 = a$ و $b = x_n$

و $x_0\ R\ x_1, x_1\ R\ x_2, ..., x_{n-1}\ R\ x_n$. نستخدم الاستقراء الرياضي على n . إذا كان n=1 فإنه يوجد $x_0, x_1 \in A$ حيث $x_0 = a$, $x_1 = b$ و $x_0 R\ x_1$. إذن، aRb وبالتالي، فإن $(a,b) \in R$. ولكن $R^1 = R$ ، إذن، $(a,b) \in R^1$. الآن نفرض أن المطلوب صحيح من أجل k ، حيث k عدد صحيح موجب . ليكن $x_0, x_1, ..., x_{k+1} \in A$ حيث $x_0 = a$ ، $x_{k+1} = b$ و $x_0\ R\ x_1, x_1\ R\ x_2, ..., x_k R x_{k+1}$ باستخدام فرض الاستقراء نجد أن $(x_0, x_k) \in R^k$. بما أن $R^{k+1} = R^k 0 R$ فإن $(x_0, x_{k+1}) = \in R^{k+1}$. Δ

تعريف (٤,٧)

لتكن R علاقة على المجموعة A .

(أ) *نُعرِّف الإغلاق الانعكاسي (reflexive closure) للعلاقة R ونرمز له بالرمز r (R) بأنه العلاقة المعرفة على A والتي تحقق الشروط التالية :*

(i) r (R) علاقة انعكاسية (ii) $R \subseteq r(R)$

(iii) إذا كانت T علاقة انعكاسية على A و $R \subseteq T$ فإن $r(R) \subseteq T$.

أي أن r(R) هي أصغر علاقة انعكاسية على A تحتوي R .

(ب) *نُعرِّف الإغلاق التناظري (symmetric closure) للعلاقة R ونرمز له بالرمز s (R) بأنه العلاقة المعرفة على A والتي تحقق الشروط التالية :*

(i) s (R) علاقة تناظرية (ii) $R \subseteq s(R)$

(iii) إذا كانت T علاقة تناظرية على A و $R \subseteq T$ فإن $s(R) \subseteq T$.

أي أن s(R) هي أصغر علاقة تناظرية على A تحتوي R .

(جـ) *نعرِّف الإغلاق المتعدي (transitive closure) للعلاقة R ونرمز له بالرمز t (R) بأنه العلاقة المعرفة على A والتي تحقق الشروط التالية :*

(i) t (R) علاقة متعدية (ii) $R \subseteq t(R)$

(iii) *إذا كانت T علاقة متعدية على A و $R \subseteq T$ فإن $t(R) \subseteq T$.*

أي أن $t(R)$ هي أصغر علاقة متعدية على A تحتوي R.

مبرهنة (٤,٦)

إذا كانت R علاقة على A فإن كلاً من $r(R)$، $s(R)$ و $t(R)$ علاقة وحيدة على A.

البرهان

متروك للقارىء. Δ

مبرهنة (٤,٧)

إذا كانت R علاقة على المجموعة A فإن $r(R) = R \cup \{(a,a) : a \in A\}$.

البرهان

ضع $S = R \cup \{(a,a) : a \in A\}$. واضح أن S انعكاسية وأن $R \subseteq S$. لتكن T علاقة انعكاسية على A حيث $R \subseteq T$. بما أن T انعكاسية فإن $\{(a,a) : a \in A\} \subseteq T$. إذن، $S \subseteq T$. وبالتالي، فإن $r(R) = S$. Δ

مبرهنة (٤,٨)

إذا كانت R علاقة على المجموعة A فإن $s(R) = R \cup R^{-1}$.

البرهان

ضع $S = R \cup R^{-1}$. ليكن $(a,b) \in S$. إذن، $(a,b) \in R$ أو $(a,b) \in R^{-1}$، وبالتالي، فإن $(b,a) \in R^{-1}$ أو $(b,a) \in R$. إذن، $(b,a) \in S$، وهكذا، فإن S تناظرية. واضح أن $R \subseteq S$. لتكن T علاقة تناظرية على A حيث $R \subseteq T$. ليكن $(a,b) \in S$.

إذن، $(a,b) \in R$ أو $(a,b) \in R^{-1}$. إذا كان $(a,b) \in R$ فإن $(a,b) \in T$ لأن $R \subseteq T$. أمـا إذا كـان $(a,b) \in R^{-1}$ فـإن $(b,a) \in R$ وبالتـالي، فـإن $(b,a) \in T$. ولكن T تناظرية، إذن، $(a,b) \in T$. وبالتالي، فإن $S \subseteq T$. وهكذا، فإن $s(R) = S$. Δ

مبرهنة (٤,٩)

إذا كانت R علاقة على المجموعة A فإن $t(R) = \cup_{n=1}^{\infty} R^n$

البرهان

ضع $S = \cup_{n=1}^{\infty} R^n$. ليكن $(a,b)\ ,\ (b,c) \in S$ إذن، يوجـد عـددان صـحـيـحـان مـوجـبـان i و j حـيـث $(a,b) \in R^i$ و $(b,c) \in R^j$. ولكـن من المبـرهنة (٤,٤) نجـد أن $R^i \circ R^j = R^{i+j}$. إذن، $(a,c) \in R^{i+j}$، وبالتـــالي، فـــإن $(a,c) \in S$. من هنا ينتج أن S متعدية. واضح أن $R = R^1 \subseteq S$. الآن، نفرض أن T علاقة متعدية حيث $R \subseteq T$. من أجل أن نثبت أن $S \subseteq T$ فإننا سوف نثبت أن $R^n \subseteq T$ لكل عـدد صحيح $n \geq 1$. نسـتـخـدم الاسـتـقـراء الرياضي على n. واضح أنه إذا كـان $n=1$ فـإن $R^1 = R \subseteq T$. لنفـرض أن $R^k \subseteq T$ حيث k عـدد صـحيح مـوجب. من التعـريف (٤,٦)، نجـد أن $R^{k+1} = R^k o R$. بما أن $R^k \subseteq T$ و $R \subseteq T$ فـإننا بالاستناد إلى المبرهنة (٤,٢)، نجـد أن $R^k o R \subseteq ToT$؛ ولكن T متعديـة، إذن، مـن المبرهنـة (٤,٣)، ينتج أن $ToT \subseteq T$. وهكذا فـإن $R^{k+1} \subseteq T$. إذن، $R^n \subseteq T$ لكل عـدد صـحـيح $n \geq 1$، وبالتـالـــي فـإن $S \subseteq T$. إذن، $t(R) = S$. Δ

مبرهنة (٤,١٠)

لتكن A مـجـمـوعـة حـيث $|A| = m \geq 1$. *إذا كـانت R عـلاقـة على A فـإن* $t(R) = \cup_{n=1}^{m} R^n$.

البرهان

من المبرهنة (٤,٩) نعلم أن $t(R) = \cup_{n=1}^{\infty} R^n$. واضح أن $\cup_{n=1}^{m} R^n \subseteq t(R)$.
ليكن $(a,b) \in t(R)$. إذن، يوجد عدد صحيح $k \geq 1$ حيث $(a,b) \in R^k$. إذا كان $k=1$ فإن $(a,b) \in R^1 = R$. وبالتالي، فإن $(a,b) \in \cup_{n=1}^{m} R^n$. الآن، نفرض أن $k \geq 2$. بما أن $(a,b) \in R^k$ فإننا بالاستناد إلى المبرهنة (٤ , ٥)، نجد أنه يوجد $x_1 , x_2 , \ldots , x_{k-1} \in A$ حيث $a R x_1 , x_1 R x_2 , \ldots , x_{k-1} R b$. إذن، إذا وضعنا

$$B = \{ r : r \geq 2 \text{ عدد صحيح، يوجد } y_1 , \ldots , y_{r-1} \in A \text{ حيث } a R y_1 , \ldots , y_{r-1} R b \}$$

فإن $B \neq \phi$. بالاستناد إلى مبدأ الترتيب الحسن نجد أنه يوجد في B عدد أصغري $j \geq 2$.
إذن، يوجد $z_1 , z_2 , \ldots , z_{j-1} \in A$ ، حيث $a R z_1 , \ldots , z_{j-1} R b$. ضع $z_j = b$. إذا كان $z_i = z_s$ حيث $1 \leq i < s \leq j$ فإن $a , z_1 , z_2 , \ldots , z_i = z_s , z_{s+1} , \ldots , z_j$ تحقق $a R z_1 , z_1 R z_2 , \ldots , z_{s-1} R z_s , z_s R z_{s+1} , \ldots , z_{j-1} R z_j$. وهذا يناقض اختيارنا للعدد j . إذن، إن العناصر $z_1 , z_2 , \ldots , z_j$ مختلفة . وبما أن $|A| = m$ فإن $j \leq m$.
إذن، $(a, b) \in R^j$ وبالتالي، فإن $(a,b) \in \cup_{n=1}^{m} R^n$. Δ

مبرهنة (٤,١١)

(أ) *إذا كانت R علاقة تناظرية على A فإن R^n تناظرية لكل عدد صحيح $n \geq 1$.*

(ب) *إذا كانت $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ متتالية من العلاقات التناظرية على A فإن $\cup_{m=1}^{\infty} R_m$ تناظرية .*

البرهان

(أ) نستخدم الاستقراء الرياضي على n . واضح أنه إذا كان $n=1$ فإن $R^1 = R$ تناظرية . الآن نفرض أن المطلوب صحيح من أجل k حيث $k \geq 1$ عدد صحيح . ليكن $(a,b) \in R^{k+1}$. بما أن $R^{k+1} = R^k \circ R$ فإنه يوجد $c \in A$ حيث $(a,c) \in R^k , (c,b) \in R$. بما أن R تناظرية فإن $(b , c) \in R$. بالاستناد إلى

فرضية الاستقراء نجد أن R^k تناظرية وبالتالي، فإن $(c, a) \in R^k$. إذن،
$(b , a) \in RoR^k$. من المبرهنة (٤,٤)، نجد أن $RoR^k = R^k oR$ وبالتالي، فإن
$(b,a) \in R^k oR = R^{k+1}$. إذن، R^{k+1} تناظرية .

(ب) ضع $T = \cup_{m=1}^{\infty} R_m$. ليكن $(a,b) \in T$. إذن، يوجد عدد صحيح $k \geq 1$ حيث
$(a,b) \in R_k$. بما أن R_k تناظرية فإن $(b,a) \in R_k$ وبالتالي، فإن $(b,a) \in T$. إذن،
T تناظرية . Δ

مبرهنة (٤,١٢)

لتكن R علاقة على المجموعة A. عندئذ :

(أ) إذا كانت R انعكاسية فإن كلاً من $s(R)$ و $t(R)$ انعكاسية .

(ب) إذا كانت R تناظرية فإن كلاً من $r(R)$ و $t(R)$ تناظرية .

(جـ) إذا كانت R متعدية فإن $r(R)$ متعدية .

البرهان

ضع $E = \{(a,a) : a \in A\}$.

(أ) لتكن R انعكاسية . إذن، $E \subseteq R$. بما أن $R \subseteq s(R)$ و $R \subseteq t(R)$ فإن $E \subseteq s(R)$ و $E \subseteq t(R)$. إذن، ، كل من $s(R)$ و $t(R)$ انعكاسية .

(ب) لتكن R تناظرية . من المبرهنة (٤,٣)، ينتج أن $R = R^{-1}$ ومن المبرهنة (٤,٧)، نعلم أن $r(R) = R \cup E$. إذن،
$(r(R))^{-1} = (R \cup E)^{-1} = R^{-1} \cup E = R \cup E = r(R)$ وبالتالي، فإن $r(R)$ تناظرية . من المبرهنة (٤,٩)، نعلم أن $t(R) = \cup_{n=1}^{\infty} R^n$. بما أن R تناظرية فإننا بالاستناد إلى المبرهنة (٤,١١)، نجد أن R^n تناظرية لكل $n \geq 1$ وبالتالي، فإن $t(R)$ تناظرية .

(جـ) لتكن R متعدية. نعلم أن $r(R) = R \cup E$. ليكن (a,b) ، $(b,c) \in r(R)$.
إذن، $(a,b) \in R$ أو $(a,b) \in E$ ؛ كذلك $(b,c) \in R$ أو $(b,c) \in E$. نعتبر الحالات المختلفة التالية :

(١) $(a,b), (b,c) \in R$. بما أن R متعدية فإن $(a,c) \in R$ وبالتالي، فإن $(a,c) \in r(R)$.

(٢) $(a,b) \in R$ ، $(b,c) \in E$. إذن $b = c$ وبالتالي، فإن $(a,c) \in R$. إذن، $(a,c) \in r(R)$.

(٣) $(a,b) \in E$ ، $(b,c) \in R$. إذن $a = b$ وبالتالي، فإن $(a,c) \in R$. إذن، $(a,c) \in r(R)$.

(٤) (a,b) ، $(b,c) \in E$. إذن $a = b$ و $b = c$ وبالتالي، فإن $a = b = c$.
إذن، $(a,c) \in E$ وبالتالي، فإن $(a,c) \in r(R)$.
إذن، في جميع الحالات، نجد أن $(a,c) \in r(R)$ وبالتالي، فإن :
$r(R)$ متعدية. Δ

تمارين (٤,١)

(١) لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ معرفة كالتالي : aRb إذا وفقط إذا كان $b \leq a^2$.

(أ) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.

(ب) جد مجال R ومداها.

(جـ) جد الرسم الموجه للعلاقة R.

(٢) لتكن R علاقة على $A = \{2, 3, 5, 7, 6, 10\}$ معرفة كالتالي :
aRb إذا وفقط إذا كان $a \equiv b \pmod 3$.

(أ) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.

(ب) اكتب R^{-1} كمجموعة أزواج مرتبة.

(جـ) جد مجال كل من R و R^{-1} ومداهما.

(د) جد الرسم الموجه لكل من R و R^{-1}

(٣) لتكن A هي المجموعة المعطاة في التمرين (٢) والعلاقة R معرفة كالتالي aRb إذا وفقط إذا كان $a + b \leq 8$. أعد التمرين (٢) لهذه العلاقة.

(٤) بين ما إذا كانت العلاقة في التمرين (١) انعكاسية، تناظرية، تخالفية، متعدية.

العلاقات في التمارين من ٥ إلى ٨ معرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة لكل من هذه العلاقات بين ما إذا كانت انعكاسية، تناظرية، تخالفية، متعدية، مترابطة.

(٥) xRy إذا وفقط إذا كان $x = y^2$.

(٦) xRy إذا وفقط إذا كان $g\,c\,d\,(x\,,\,y) = 1$.

(٧) xRy إذا وفقط إذا كان $x = x + y$.

(٨) xRy إذا وفقط إذا كان $x = \max\,\{x, y\}$.

(٩) إذا كانت $A = \{a\,,\,b\,,\,c,\,d\}$ وكانت $R = \{(a,a)\,,\,(a,b)\,,\,(c,d)\,,\,(d,b)\}$، وكانت $S = \{(a,a)\,,\,(b,a)\,,\,(c,a)\,,\,(b,b)\,,\,(d,d)\}$ فجد كلاً من RoS و SoR.

(١٠) جد مثالا لعلاقة انعكاسية، تناظرية وليست متعدية.

(١١) جد مثالا لعلاقة انعكاسية، ليست تناظرية وليست متعدية.

في التمارين من ١٢ إلى ٣٣ العلاقتان R و S معرفتان على المجموعة A. إذا كانت العبارة صحيحة فبرهن ذلك أما إذا كانت خاطئة فأعط مثالاً يُبيّن خطأها.

(١٢) إذا كانت R، S متعديتين فإن $R \cup S$ متعدية .

(١٣) إذا كانت R، S متعديتين فإن $R \cap S$ متعدية .

(١٤) إذا كانت R، S متعديتين فإن RoS متعدية .

(١٥) إذا كانت R انعكاسية فإن $(R^{-1})^c$ انعكاسية .

(١٦) إذا كانت R متعدية فإن R^{-1} متعدية .

(١٧) إذا كانت R انعكاسية فإن R^{-1} انعكاسية .

(١٨) إذا كانت R تناظرية فإن R^{-1} تناظرية .

(١٩) إذا كانت R مترابطة فإن R^{-1} مترابطة .

(٢٠) إذا كانت R، S انعكاسيتين فإن $R \cup S$ انعكاسية .

(٢١) إذا كانت R، S تناظريتين فإن $R \cup S$ تناظرية .

(٢٢) إذا كانت R، S تناظريتين فإن RoS تناظرية .

(٢٣) إذا كانت R، S تخالفيتين فإن $R \cup S$ تخالفية .

(٢٤) إذا كانت R، S تخالفيتين فإن RoS تخالفية .

(٢٥) إذا كانت R، S مترابطتين فإن $R \cup S$ مترابطة .

(٢٦) إذا كانت R، S مترابطتين فإن $R \cap S$ مترابطة .

(٢٧) إذا كانت R، S مترابطتين فإن RoS مترابطة .

(٢٨) إذا كانت R تخالفية فإن R^{-1} تخالفية .

(٢٩) إذا كانت R مترابطة فإن R^c مترابطة .

(٣٠) $r(R \cup S) = r(R) \cup r(S)$.

(٣١) $r(R \cap S) = r(R) \cap r(S)$.

(٣٢) $s(R \cap S) = s(R) \cap s(S)$.

(٣٣) $t(R \cap S) = t(R) \cap t(S)$.

في كل من التمـــارين من ٣٤ إلى ٣٩ أثبت صـحة العبارة المعطـاة حيث R، S و T علاقات على المجموعة A .

(٣٤) $(RoS)^{-1} = S^{-1} \; o \; R^{-1}$.

(٣٥) $(R^{-1})^{c} = (R^{c})^{-1}$.

(٣٦) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

(٣٧) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

(٣٨) $Ro\,(S \cup T) = (RoS) \cup (RoT)$.

(٣٩) $(R \cup S)oT = (RoT) \cup (SoT)$.

(٤٠) أعط مثالا لعلاقات R، S و T حيث يكون :

$Ro\,(S \cap T) \neq (RoS) \cap (RoT)$.

(٤١) لتكن R علاقة على المجموعة A . أثبت مايلي :

(أ) R متعدية إذا وفقط إذا كان $R^{n} \subseteq R$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$.

(ب) R متعدية إذا وفقط إذا كان $t\,(R) = R$.

(جـ) R تناظرية إذا وفقط إذا كان $s\,(R) = R$.

(د) R انعكاسية إذا وفقط إذا كان $r\,(R) = R$.

(٤٢) لتكن R علاقة على A . أثبت أن :

(أ) $sr\,(R) = rs\,(R)$. (ب) $tr\,(R) = rt\,(R)$.

(٤٣) لتكن $A = \{1,2,3,\}$ ولتكن $R = \{ (1,1) , (1,2) , (1,3) , (3,3) \}$.

(أ) أثبت أن R متعدية .

(ب) جد $s(R)$ وأثبت أن $s(R)$ ليست متعدية .

(جـ) أثبت أن $st(R) \neq ts(R)$.

(٤ , ٢) علاقات التكافؤ
Equivalence Relations

تعريف (٤,٨)

تُسمّى العلاقة R المعرفة على المجموعة A علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية ، تناظرية ومتعدية .

مثال (٤,١٠)

العلاقات المعرفة في الأمثلة (٤,٢)، (٤,٣) و (٤,٦) جميعها علاقات تكافؤ .

مثال (٤,١١)

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ كالتالي : $(a,b)\ R\ (c,d)$ إذا وفقط إذا كان $a + d = b + c$. بيِّن أن العلاقة R علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

الحل

(١) بما أن $a + b = b + a$ فإن $(a,b)\ R\ (a,b)$ لكل $(a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ وبالتالي، فإن R انعكاسية .

(٢) إذا كان $(a,b)\ R\ (c,d)$ فإن $a + d = b + c$، ومنه $c + b = d + a$ ، أي أن $(c,d)\ R(a,b)$ وبالتالي، فإن R تناظرية .

(٣) إذا كان $(a,b)\ R\ (c,d)$ و $(c,d)\ R\ (e,f)$ فإن $a+d = b+c$ و $c+f = d+e$. وبجمع

المعادلتين والاختصار نجد أن : $a+f = b+e$ ، أي أن $(a,b)\ R\ (e,f)$ وبالتالي ، فإن R متعدية . من (١) ، (٢) و(٣) نستنتج أن R علاقة تكافؤ .

مبرهنة (٤,١٣)

لتكن R علاقة على المجموعة A. عندئذ :

(أ) *$tsr(R)$ علاقة تكافؤ على A.*

(ب) *إذا كانت T علاقة تكافؤ على A حيث $R \subseteq T$ فإن $tsr(R) \subseteq T$.*

البرهان

(أ) بما أن $r(R)$ انعكاسية فإننا بالاستناد إلى المبرهنة (٤,١٢) ، نجد أن $tsr(R)$ انعكاسية . بما أن $sr(R)$ تناظرية فإننا بالاستناد إلى المبرهنة (٤,١٢) ، نجد أن $tsr(R)$ تناظرية . واضح أن $tsr(R)$ متعدية ، وبالتالي ، فإن $tsr(R)$ علاقة تكافؤ .

(ب) بما أن $R \subseteq T$ فإن $r(R) \subseteq r(T)$. ولكن T انعكاسية ، إذن $r(T) = T$. إذن $r(R) \subseteq T$. بالمثل ، $sr(R) \subseteq s(T) = T$ لأن T تناظرية . أيضاً ، $tsr(R) \subseteq t(T) = T$ لأن T متعدية . Δ

تعريف (٤,٩)

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A وليكن $a \in A$. يعرف فصل تكافؤ a (equivalence class of a) ويرمز له بالرمز $[a]$ كالتالي : $[a] = \{b \in A : bRa\}$.

مثال (٤,١٢)

جد $[(1,1)]$ حيث R هي العلاقة في المثال (٤,١١) .

الحل

$$[(1,1)] = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : (a,b)\, R\, (1,1)\}$$
$$= \{(a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : a+1 = b+1\}$$
$$= \{(a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : b = a\}$$
$$= \{(a,a) : a \in \mathbb{Z}^+\}$$
$$= \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots\}$$

مثال (٤,١٣)

جد [2] حيث R هي علاقة التطابق قياس 5 .

الحل

$$[2] = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 2 \pmod 5\}$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} : a - 2 = 5k, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

مبرهنة (٤,١٤)

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A . عندئذ :

(١) $a \in [a]$ لكل $a \in A$.

(٢) *إذا كان $a, b \in A$ فإن aRb إذا وفقط إذا كان $[a] = [b]$.*

(٣) *إذا كان $a, b \in A$ فإن $[a] = [b]$ أو $[a] \cap [b] = \phi$.*

البرهان

(١) بما أن R انعكاسية فإن aRa لكل $a \in A$، أي أن $a \in [a]$ لكل $a \in A$.

(٢) لنفـرض أن aRb و $x \in [a]$. عندئذ xRa وبما أن R مـتـعـدية فـإن xRb أي أن $x \in [b]$ وبالتـالي، فـإن $[a] \subseteq [b]$. وبالمثل يمكـن برهان $[b] \subseteq [a]$ وبالتـالي، فإن $[a]=[b]$.

ولبـرهان العكس نفـرض أن $[a] = [b]$. بما أن $a \in [a]$ فـإن $a \in [b]$ وبالتـالي، فإن aRb .

(٣) نفـرض أن $[a] \cap [b] \neq \phi$ ونثبت أن $[a] = [b]$ بما أن $[a] \cap [b] \neq \phi$ فـإنه يوجـد x حـيث $x \in [a] \cap [b]$ ، ومنه فـإن، $x \in [a]$ و $x \in [b]$ ، أي أن، xRa و xRb . بالاستناد إلى الفقرة (٢)، نجد أن $[a] = [x]$ و $[b] = [x]$. إذن $[a] = [b]$. Δ

تعريف (٤,١٠)

لتكن A مجموعة ما و P مجموعة عناصرها مجموعات جزئية غير خالية من المجموعة A . عندئذ، نقول إن P تجزئة (partition) للمجموعة A إذا تحقق مايلي:

(١) $A = \bigcup_{S \in P} S$.

(٢) إذا كان $S , T \in P$ و $S \neq T$ فإن $S \cap T = \phi$.

مثال (٤,١٤)

إذا كانت $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$ فإن المجموعة $P_1 = \{\{1,2\}, \{3,4,6\}, \{5\}\}$ تجزئة للمجموعة A . أما المجموعة $P_2 = \{\{1,2,3\}, \{3,4\}, \{5,6\}\}$ فإنها ليست تجزئة للمجموعة A (لماذا ؟) .

المبـرهنة التـاليـة توضح لنا العـلاقـة بين عـلاقـات التكافـؤ على المجمـوعـة A وتجزئات المجموعة A .

مبرهنة (٤,١٥)

(أ) لتكن P تجزئة للمجموعة A . إذا كانت R هي العلاقة المعرفة على A كمايلي :
aRb إذا وفقط إذا كان a و b عنصرين في نفس المجموعة الجزئية المنتمية إلى P، فإن R علاقة تكافؤ على A .

(ب) إذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن $P = \{[a] : a \in A\}$ تجزئة للمجموعة A .

البرهان

(أ) (١) $a \in A$. بما أن $A = \bigcup_{S \in P} S$ فإنه توجد مجموعة $S \in P$ حيث يكون $a \in S$ وبالتالي ، فإن aRa وعليه فإن R انعكاسية .

(٢) لنفرض أن aRb . عندئذ ، توجد مجموعة $S \in P$ حيث يكون $a,b \in S$ وبالتالي ، فإن bRa . أي أن R تناظرية .

(٣) لنفرض أن aRb و bRc . عندئذ ، توجد مجموعتان $S ,T \in P$ حيث يكون $a,b \in S$ و $b,c \in T$.
إذا كان $S \neq T$ فإن $b \in S$ و $b \in T$ وهذا مستحيل لأن $S \cap T = \phi$.
إذن ، $S = T$ وبالتالي ، فإن $a,c \in S$ ومنه aRc . أي أن R متعدية .

(ب) برهان هذه الفقرة ينتج مباشرة من المبرهنة (٤,١٤) . Δ

مثال (٤,١٥)

إذا كانت R علاقة التطابق قياس 3 فإنه من السهل إثبات أن $P = \{[0] , [1] , [2]\}$ حيث

$$[0] = \{\ldots , -9 , -6 , -3 , 0 , 3 , 6 , 9 , \ldots\}$$
$$[1] = \{\ldots , -8 , -5 , -2 , 1 , 4 , 7 , \ldots\}$$
$$[2] = \{\ldots , -7 , -4 , -1 , 2 , 5 , 8 , \ldots\}$$

مثال (٤,١٦)

إذا كانت $A = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ و $P = \{\{1,2\} , \{3,4\}\}$ تجزئة للمجموعة A فإن علاقة التكافؤ التي نحصل عليها من P هي :

$R = \{(1,1) , (1,2) , (2,1) , (2,2) , (3,3) , (3,4) , (4,3) , (4,4)\}$.

تمارين (٤,٢)

في التمارين من ١ إلى ٤ بين ما إذا كانت العلاقة المعطاة علاقة تكافؤ أم لا ، وإذا كانت علاقة تكافؤ فجد جميع فصول التكافؤ والتجزئة التي تحصل عليها من علاقة التكافؤ .

(١) $A =\{-1, 0 , 1\}$ ، $R = \{ (x , y) : x^2 = y^2\}$

(٢) $A =\left\{\frac{a}{b} : a , b \in \mathbb{Z} , b \neq 0\right\}$ ، $R =\left\{\left(\frac{a}{b} , \frac{c}{d}\right) : a d = bc\right\}$

(٣) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية ، S العلاقة المعرفة كالتالي :

$(a,b) \; S \; (c,d)$ إذا وفقط إذا كان $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

(٤) A كما في التمرين (٣)، S معرفة كالتالي :

$(a ,b) \; S \; (c,d)$ إذا وفقط إذا كان $|a|+|b|=|c|+|d|$.

(٥) لنفرض أن R، S علاقتا تكافؤ على المجموعة A .

(أ) أثبت أن $R \cap S$ علاقة تكافؤ على المجموعة A .

(ب) هل $R \cup S$ علاقة تكافؤ على المجموعة A؟ لماذا ؟

(جـ) هل RoS علاقة تكافؤ على المجموعة A؟ لماذا؟ .

(د) هل R-S علاقة تكافؤ على المجموعة A؟ لماذا؟ .

(٦) العلاقة R معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ على النحو التالي :

$x\,Ry \Leftrightarrow |y-2| = |x-2|$. برهن على أن R علاقة تكافؤ وجد جميع فصول التكافؤ .

(٧) لتكن U مجموعة غير خالية وW مجموعة جزئية معطاة من U . لتكن R علاقة معرفة على P (U) على النحو التالي : $XRY \Leftrightarrow X\cap W = Y\cap W$.

(أ) برهن على أن R علاقة تكافؤ .

(ب) إذا كانت $U =\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$ ، $W =\{ 1 , 2 , 5\}$ و $X =\{ 2 , 4 , 5\}$ فجد [X] .

(٨) كل مما يلي تجزئة للمجموعة $A =\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5, 6\}$.

(أ) $P_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$.

(ب) $P_2 = \{\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}\}$.

(جـ) $P_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$

(د) $P_4 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4 , 6\}\}$.

جد علاقة التكافؤ التي تحصل عليها من التجزئة في كل حالة .

(٩) لتكن R علاقة انعكاسية على مجموعة غير خالية A .

برهن على أن R علاقة تكافؤ إذا وفقط إذا حققت الشرط التالي لكل $x , y , z \in A$:

xRy و $xRz \Rightarrow yRz$.

(١٠) لكل علاقة ~ من العلاقات التالية المعرفة على $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بين ما إذا كانت ~ علاقة تكافؤ أم لا :

(أ) $(x_1 , y_1) \sim (x_2 , y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1$.

(ب) $(x_1 , y_1) \sim (x_2 , y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2) (y_1 - y_2) = 0$.

(جـ) $(x_1 , y_1) \sim (x_2 , y_2) \Leftrightarrow x_1 y_1 = x_2 y_2$.

(١١) لتكن ~ علاقة على $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ معرفة على النحو التالي :

$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1$.

(أ) برهن على أن ~ علاقة تكافؤ .

(ب) صف فصل التكافؤ $[(m, n)]$.

(١٢) لتكن R العلاقة المعرفة على $\mathbb{Z}$ على النحو التالي :

$aRb \Leftrightarrow 3$ يقسم $a + 2b$. برهن على أن R علاقة تكافؤ وجد فصول التكافؤ .

(١٣) لتكن ~ علاقة معرفة على $\mathbb{R}^+$ على النحو التالي :

$x \sim y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}^+$. برهن على أن ~ علاقة تكافؤ ثم جد فصول التكافؤ .

(٤,٣) علاقات الترتيب
Order Relations

تعريف (٤,١١)

لتكن R علاقة على المجموعة A. تُسمّى R علاقة ترتيب جزئي (partial order) على المجموعة A إذا كانت R انعكاسية ، تخالفية ومتعدية . وتُسمّى R علاقة ترتيب كلي (total order) على المجموعة A إذا كانت R علاقة ترتيب جزئي ومترابطة .

مثال (٤,١٧)

العلاقة المعرفة في المثال (٤,٢) علاقة ترتيب جزئي وليست علاقة ترتيب كلي .

مثال (٤,١٨)

العلاقة المعرفة في المثال (٤,٥) علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Z}^+$ ولكنها ليست علاقة ترتيب كلي .

مثال (٤,١٩)

العلاقة المعرفة في المثال (٤,٧) علاقة ترتيب كلي على مجموعة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$.

تعريف (٤,١٢)

إذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A فإن الزوج المرتب (A,R) يسمى مجموعة مرتبة جزئيًا . وإذا كانت R علاقة ترتيب كلي على المجموعة A فإن الزوج المرتب (A,R) يسمى مجموعة مرتبة كليًا .

ملاحظة

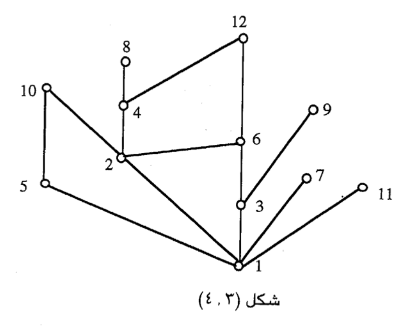
إذا كانت (A,R) مجموعة مرتبة جزئيًا فإننا سوف نستخدم الرمز $x \leq y$ بدلا من xRy ونقول إن x أقل من أو يساوي y .

من الجدير بالذكر هنا أنه إذا كان لدينا مجموعة منتهية مرتبة جزئيا فإننا نستطيع تمثيلها تخطيطيا على الورق بشكل يسمى شكل هاس (Hasse diagram) ويتم ذلك كالتالي :

نمثل كل عنصر من عناصر A بدائرة صغيرة . وإذا كان هناك عنصران $a , b \in A$ حيث $a \neq b$ و $a \leq b$ فإننا نضع b أعلى a ونصل بينهما بوساطة خط مستقيم مع تجاهلنا للخطوط التي نحصل عليها تلقائيًا بوساطة خاصّة التعدي ، فمثلا ، إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإننا نصل بين a و b ونصل بين b و c ولكننا لانصل بين a و c .

مثال (٤,٢٠)

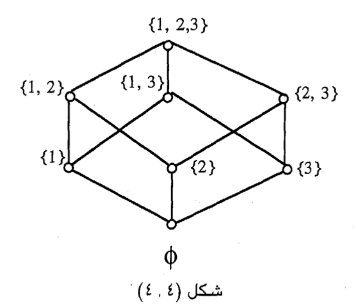
لتكن $A = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ ولتكن $\leq$ هي العـلاقـة المعـرفـة على A كـمـا يلي: $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $a|b$. من مثال (٤,١٩)، نعلم أن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبةجزئيا ويمكن تمثيل هذه المجموعة بوساطة شكل هاس كما هو مبين بالشكل (٤,٣).



شكل (٤،٣)

مثال (٤,٢١)

إذا كانت $S = \{1,2,3\}$ وكانت $P(S)$ هي مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعية S وعرفنا العلاقة $\leq$ على $P(S)$ كالتالي: $A \leq B$ إذا وفقط إذا كان $A \subseteq B$. من السـهل إثبات أن $(P(S), \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيًا. وشكل هاس لهذه المجموعة موضح بالشكل (٤,٤).



شكل (٤ ، ٤)

ملاحظة

لاحظ أنه إذا كانت $(A , \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيًا وكانت $C \subseteq A$ فإن $(C , \leq)$ يجب أن تكون مجموعة مرتبة جزئيًا .

تعريف (٤,١٣)

لتكن $(A , \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيًا ولتكن $C \subseteq A$ نقول إن C سلسلة (chain) في A إذا كانت $(C , \leq)$ مجموعة مرتبة كليًا .

مثال (٤,٢٢)

إذا كانت $(A , \leq)$ هي المجموعة المرتبة جزئيًا والمعطاة في المثال (٤,٢٠) فإن كلا من $\{1 , 2 , 4 , 12\}$ ، $\{1 , 2, 6 , 12\}$ ، $\{1 , 3 , 6 , 12\}$ و $\{1 , 5 , 10\}$ سلسلة في A .

تعريف (٤,١٤)

لتكن $(A , \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيًا و $a , b \in A$ و $a \neq b$ نقول إن b غطاء (cover) للعنصر a إذا تحقق مايلي :

(١) $a \leq b$،

(٢) إذا كان $x \in A$ حيث $a \leq x \leq b$ فإن $a = x$ أو $x = b$.

مثال (٤,٢٣)

في الشكل (٤,٣)، نلاحظ أن 4 غطاء للعدد 2 و 6 غطاء للعدد 2 ولكن 12 ليس غطاءً للعدد 2.

تعريف (٤,١٥)

لتكن $(A , \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيًا.

(i) نقول إن $x \in A$ و $y \in A$ قابلان للمقارنة (comparable) إذا كان $x \leq y$ أو $y \leq x$ ونقول إنهما غير قابلين للمقارنة (noncomparable) إذا كان $x \nleq y$ و $y \nleq x$.

(ii) نقول إن $x \in A$ عنصر أعظمي (maximal) لـ A إذا تحقق مايلي : إذا كان $a \in A$ و $a \neq x$ فإن $x \nleq a$. أي أنه لكل $a \in A$ إما أن يكون $a \leq x$ أو أن a و x غير قابلين للمقارنة.

(iii) نقول إن $y \in A$ عنصر أصغري (minimal) لـ A إذا تحقق مايلي : إذا كان $b \in A$ و $b \neq y$ فإن $b \nleq y$. أي أنه لكل $b \in A$ إما أَن يكون $y \leq b$ أو أن b و y غير قابلين للمقارنة.

مثال (٤,٢٤)

لتكن $X = \{1, 2, 3\}$ و $A = P(X)$. عندئذ، X عنصر أعظمي و ϕ عنصر أصغري للمجموعة المرتبة جزئيًا $(A, \subseteq)$.

مثال (٤,٢٥)

لتكن $X = \{1, 2, 3\}$ و B مجموعة المجموعات الجزئية الفعلية من X والعلاقة $\subseteq$ هي كما في المثال (٤,٢٤). عندئذ، يكون كل من المجموعات $\{1, 2\}$، $\{1, 3\}$ و $\{2,3\}$ عنصرًا أعظميًا ولكن ϕ هي العنصر الأصغري الوحيد.

مثال (٤,٢٦)

المجموعة المرتبة جزئيًا $(\mathbb{Z}, \leq)$، حيث $\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة و $\leq$ هي علاقة أقل من أو يساوي الاعتيادية، لاتحتوي على عنصر أعظمي أو أصغري. أما المجموعة المرتبة جزئيا $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ فإنها تحتوي على عنصر أصغري هو 1 ولكنها لاتحتوي على عنصر أعظمي.

المبرهنة التالية تبين أن المجموعات المنتهية المرتبة جزئيًا تحتوي دائمًا على عنصر أصغري وآخر أعظمي.

مبرهنة (٤,١٦)

إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة منتهية مرتبة جزئيا فإن A تحتوي على عنصر أعظمي وعنصر أصغري.

البرهان

لنفرض أن $a_1 \in A$. إذا لم يوجد عنصر $a \in A$، $a \neq a_1$ حيث إن $a_1 \leq a$ فإن

a_1 عنصر أعظمي ونكون قد انتهينا. لنفرض إذن، وجود $a_2 \in A$ ، $a_2 \neq a_1$ حيث إن $a_1 \leq a_2$. إذا لم يوجد $a \in A$، $a \neq a_2$ حيث إن $a_2 \leq a$ فإن a_2 أعظمي ونتوقف هنا. نفرض إذن، وجود $a_3 \in A$، $a_3 \neq a_2$ حيث إن $a_2 \leq a_3$. لاحظ أن $a_3 \neq a_1$ (لماذا؟). وبالاستمرار على هذا المنوال وبما أن A منتهية فإننا لابد وأن نتوقف بعد الحصول على عنصر $a_n \in A$ حيث يكون $a_n \nleq a$ لكل $a \neq a_n \in A$ ومن ثم، فإن a_n عنصر أعظمي.

إن البرهان على وجود عنصر أصغري مماثل. Δ

من بين جميع العناصر الأعظمية والأصغرية في المجموعة المرتبة جزئياً عنصران لهما أهمية خاصة (إن وجدا).

تعريف (٤,١٦)

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيًا.

(i) نقول إن $x \in A$ هو العنصر الأصغر (least) لـ A إذا كان $x \leq a$ لكل $a \in A$.

(ii) نقول إن $y \in A$ هو العنصر الأعظم (greatest) لـ A إذا كان $a \leq y$ لكل $a \in A$.

مثال (٤,٢٧)

إذا كانت $(A, \subseteq)$ كما في المثال (٤,٢٤) فإن ϕ هي العنصر الأصغر وإن X هي العنصر الأعظم.

مثال (٤,٢٨)

إذا كانت B هي مجموعة المجموعات الجزئية غير الخالية من $X = \{1, 2, 3\}$ فإن X هي العنصر الأعظم في $(B, \subseteq)$ ولكن العنصر الأصغر غير موجود. لاحظ أن $(B, \subseteq)$ تحتوي على ثلاثة عناصر أصغرية.

لاحظ أنه من الممكن أن تحتوي مجموعة مرتبة جزئيا على أكثر من عنصر أعظمي (أو أصغري)، إلا أن العنصر الأعظم (الأصغر) وحيد إن وجد وهذا ماتقدمه لنا المبرهنة التالية :

مبرهنة (٤,١٧)

إذا وجد العنصر الأعظم (الأصغر) في المجموعة المرتبة جزئيًا $(A, \leq)$ فإنه وحيد.

البرهان

إذا كان كل من x و y العنصر الأعظم في المجموعة A فإن $x \leq y$ وإن $y \leq x$ (لماذا؟). وبما أن $\leq$ تخالفية فإننا نجد أن $x = y$.

إن البرهان على أن العنصر الأصغر وحيد مماثل. Δ

تعريف (٤,١٧)

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيًا ولتكن $B \subseteq A$.

(i) *نقول إن $x \in A$ حد أدنى (lower bound) للمجموعة B إذا كان $x \leq b$ لكل $b \in B$.*

(ii) *نقول إن $y \in A$ حد أعلى (upper bound) للمجموعة B إذا كان $b \leq y$ لكل $b \in B$.*

(iii) نقول إن $x \in A$ أعظم حد أدنى *(greatest lower bound)* للمجموعة B ويرمز له بالرمز $glb(B)$ إذا كان x حدًا أدنى لـ B وإذا كان x' أي حد أدنى آخر للمجموعة B فإن $x' \leq x$.

(iv) نقول إن $y \in A$ أصغر حدًا أعلى *(least upper bound)* للمجموعة B ويرمز له بالرمز $lub(B)$ إذا كان y حدا أعلى لـ B وإذا كان y' أي حد أعلى آخر للمجموعة B فإن $y \leq y'$.

مثال (٤,٢٩)

إذا كانت $(\mathbb{R}, \leq)$ مجموعة الأعداد الحقيقية المرتبة جزئيا بعلاقة أقل من أو يساوي الاعتيادية وكانت $B = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ فإن $glb(B) = 0$ وإن $lub(B) = 1$. لاحظ أن $0, 1 \in B$.

إذا كانت $C = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ فإن $glb(C) = 0$ وإن $lub(C) = 1$ ولكن $1 \in C$، $0 \notin C$ إذا كانت $D = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ فإن $glb(D) = -\sqrt{2}$ وإن $lub(D) = \sqrt{2}$ وإن $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \notin D$.

مثال (٤,٣٠)

إذا كانت $(\mathbb{Q}, \leq)$ مجموعة الأعداد الكسرية المرتبة جزئيا بعلاقة أقل من أو يساوي الاعتيادية وكانت $D = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ فإنه لايوجد للمجموعة D أصغر حد أعلى أو أعظم حد أدنى .

مبرهنة (٤,١٨)

إذا كانت $(A, \leq)$ *مجموعة مرتبة جزئيًا و* $B \subseteq A$ *وكان* $lub(B)$ *(* $glb(B)$ *) موجودًا فإنه وحيد.*

البرهان

مماثل لبرهان (٤,١٧) . Δ

تعريف (٤,١٨)

تكون المجموعة المرتبة جزئيًا $(L , \leq)$ *شبكية (lattice) إذا وجد كل من* $lub\{x , y\}$ *و* $glb \{x,y\}$ *لكل* $x , y \in L$.

مثال (٤,٣١)

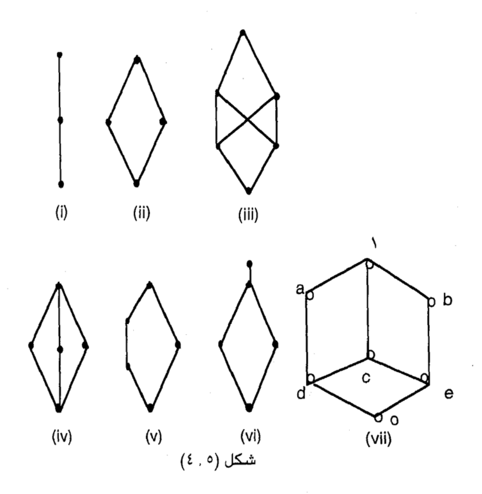
المجموعة المرتبة جزئيًا $(A , \leq)$ حيث A هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة و $\leq$هي علاقة أقل من أو يساوي الاعتيادية شبكية لأن $glb \{x,y\} = min \{x,y\}$ و $lub \{x,y\} = max \{x, y\}$.

مثال (٤,٣٢)

لتكن X مجموعة . عندئذ ، $(P (x) , \subseteq)$ شبكية لأن $lub \{A , B\} = A\cup B$ و $glb (A,B) = A\cap B$ لكل $A , B \subseteq X$.

مثال (٤,٣٣)

جميع المجموعات المرتبة جزئيًا المبينة في الشكل (٤,٥) شبكيات ماعدا (iii) (تحقق من ذلك) .



شكل (٥ , ٤)

تمارين (٤,٣)

(١) ارسم شكل هاس للمجموعة المرتبة جزئيًا (| , A) حيث إن $A = \{1, 2, 3, ..., 16\}$.

(٢) أعد التمرين (١) إذا كانت $A = \{1, 2, 3, ..., 30\}$.

(٣) أعد التمرين (١) إذا كانت $A = \{1, 2, 3, ..., 24\}$.

(٤) لتكن $(\mathbb{Z}, \leq)$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة المرتبة كليًا والعلاقة $\leq_1$ معرفة على $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ كالتالي : $(a,b) \leq_1 (c,d)$ إذا وفقط إذا كان $a \leq c$ و $b \leq d$. أثبت أن $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_1)$ مجموعة مرتبة جزئيًا .

(٥) إذا كانت $C = \{1, 2, 3\}$ والمجموعة المرتبة جزئيًا $(C \times C, \leq_1)$ هي كما في التمرين (٤) فارسم شكل هاس لهذه المجموعة .

(٦) إذا كانت $(\mathbb{Z}, \leq)$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة المرتبة كليًا ، وكانت العلاقة $\leq_1$ معرفة على $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ كالتالي : $(a,b) \leq_1 (c,d)$ إذا وفقط إذا كان $a < c$ أو $(a=c$ و $b \leq d)$. أثبت أن $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_1)$ مجموعة مرتبة كليًا .

(٧) إذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A فأثبت أن R^{-1} علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A .

(٨) لتكن $(A, \leq_1)$ و $(B, \leq_2)$ مجموعتين مرتبتين كليًا والعلاقة $\leq$ معرفة على $A\times B$ على النحو التالي : $(a,b) \leq (c,d)$ إذا وفقط إذا كان $a \leq_1 c$ و $b \leq_2 d$.

(أ) أثبت أن $(A \times B, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيًا .

(ب) أثبت أن $(A \times B, \leq)$ ليست مجموعة مرتبة كليًا إلا إذا كانت A أو B تحتوي على عنصر واحد فقط .

(٩) إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيًا حيث A منتهية فبرهن على أنها تحتوي على عنصر أصغري .

(١٠) برهن على أنه في حالة وجود العنصر الأصغر في المجموعة المرتبة جزئيًا $(A, \leq)$ فإنه يجب أن يكون وحيدًا .

(١١) إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة كليًا فبرهن على أنها شبكية . هل العكس صحيح ؟

(١٢) جد جميع العناصر الأعظمية والأصغرية للمجموعة المرتبة جزئيًا في التمرين (٣) . هل تحتوي A على العنصر الأعظم ؟

(١٣) أعط مثالا لمجموعة مرتبة جزئيًا تحتوي على أربعة عناصر أعظمية ولا تحتوي على العنصر الأعظم .

(١٤) لتكن $A \subseteq \mathbb{Z}^+$. ارسم شكل هاس للمجموعة المرتبة جزئيًا $(A, |)$ وبين ما إذا كانت شبكية أم لا :

(أ) $A = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ (ب) $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

(جـ) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. (د) $A = \{1, 3, 6, 30\}$.

(١٥) أعد التمرين (١٤) للمجموعات الجزئية التالية من $\mathbb{Z}^+$:

(أ) $A = \{2, 5, 15, 30\}$ (ب) $A = \{1, 2, 4, 8\}$.

(جـ) $A = \{1, 2, 4, 5\}$ (د) $A = \{1, 2, 4\}$.

(١٦) كل علاقة من العلاقات التالية معرفة على المجموعة $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

بين أي منها تكون علاقة ترتيب جزئي ، ثم ارسم شكل هاس لكل مجموعة مرتبة جزئيًا . وجد جميع العناصر الأصغرية والأعظمية والعنصر الأصغر والعنصر الأعظم (إن أمكن ذلك) .

(أ) $R_1 = \{ (c,a), (f,d), (f,b), (e,c), (e,a), (d,b) \}$.

(ب) $R_2 = \{(f,f), (e,e), (d,d), (c,c), (b,b), (a,a) \}$.

(جـ) $R_3 = R_1 \cup R_2$.

(د) $R_4 = R_3 \cup \{ (d,c) \}$.

(هـ) $R_5 = R_4 \cup \{ (f,c) \}$.

(١٧) لتكن $A = \{ (a,b) : a,b \in \mathbb{Z}^+ , \gcd(a,b) = 1\}$.

ولتكن R العلاقة المعرفة على A على النحو التالي :

. $ad \leq bc \Leftrightarrow (a,b)\ R\ (c,d)$. برهن على أن R علاقة ترتيب كلي على A .

(١٨) لتكن $\mathbb{Q}^+$ هي مجموعة الأعداد الكسرية الموجبة . والعلاقة $\leq$ معرفة على $\mathbb{Q}^+$ على النحو التالي $r \leq s \Leftrightarrow \frac{s}{r} \in \mathbb{Z}^+$.

(أ) أثبت أن $\leq$ علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Q}^+$.

(ب) ارسم شكل هاس للمجموعة المرتبة جزئيًا $(A, \leq)$ حيث $A = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 6\}$.

(١٩) لتكن A مجموعة معرفا عليها علاقة > حيث إن > متعدية وإن $a \nless a$ لكل $a \in A$. نعرف علاقة $\leq$ على A على النحو التالي :

$a \leq b \Leftrightarrow a < b$ أو $a = b$.

برهن على أن $\leq$ علاقة ترتيب جزئي .

(٢٠) لتكن > العلاقة المعرفة على $\mathbb{Z} - \{0\}$ على النحو التالي : .

$m < n \longleftrightarrow 2m | n$

(أ) برهن على أن > متعدية وأن $m \nless m$ لكل $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

(ب) استخدم تمرين (١٩) لتجد علاقة ترتيب جزئي $\leq$ على $\mathbb{Z} - \{0\}$.

(٢١) لتكن > العلاقة المعرفة على $\mathbb{Z}^+ - \{1\}$ على النحو التالي :

$m < n \Leftrightarrow m^2 | n$.

(أ) برهن على أن > متعدية وأن $m \nless m$ لكل $m \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$.

(ب) استخدم تمرين (١٩) لتجد علاقة ترتيب جزئي $\leq$ على $\mathbb{Z}^+ - \{1\}$.

(جـ) ارسم شكل هاس للمجموعة المرتبة جزئيًا $(A, \leq)$ حيث $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 16, 36, 81, 1296\}$.

(د) هل تحتوي A على العنصر الأصغر ؟ العنصر الأعظم ؟

(٢٢) لتكن R علاقة تكافؤ و S علاقة ترتيب جزئي على المجموعة غير الخالية A. برهن على أن $R\cap S$ علاقة ترتيب جزئي على A .

(٢٣) إذا كانت R هي علاقة التطابق قياس 2 على $\mathbb{Z}^+$ و S هي علاقة « يقسم » على $\mathbb{Z}^+$ فجد $R\cap S$.

(٤,٤) التطبيقات
Mappings

سنقدم في هذا البند صنفًا من العلاقات له أهمية كبيرة في الرياضيات .

تعريف (٤,١٩)

إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين وكانت f علاقة من A إلى B فإن f تسمى تطبيقًا إذا تحقق مايلي :

(i) مجال f يساوي A .

(ii) كل عنصر من A يرتبط بعنصر وحيد من B ، أي أنه إذا كان (x,y) ، $(x,z)\in f$ فإن $y = z$.

إذا كان f تطبيقًا من A إلى B فإننا عادة نرمز لذلك بالرمز $f : A \longrightarrow B$ ، وإذا كان $(x,y)\in f$ فإننا نسمي y صورة x ونكتب $f(x) = y$. كما يسمى العنصر x صورة عكسية للعنصر y .

سنرمز لمدى التطبيق f بالرمز Imf . أي أن

$$\mathrm{Imf} = \{ b\in B : \exists\ a\in A \ , \ (a,b) \in f \} = \{f(a) : a\in A\}$$

إذا كانت $A = B$ فإننا نسمي f تطبيقًا على A .

مثال (٤,٣٤)

بيّن أي من العلاقات التالية تكون تطبيقًا .

(أ) $f = \{ (1, 2) , (2, 3) , (3, 4) \}$ على المجموعة $\{ 1 ,2 , 3 ,4 \}$.

(ب) $g = \{ (m, n) : m|n\}$ على المجموعة $\mathbb{Z}$.

(جـ) $h = \{ (m, n) : n = 2 m+1\}$ على المجموعة $\mathbb{Z}$.

الحل

(أ) f ليست تطبيقًا لأنه لايوجد صورة للعنصر 4 .

(ب) g ليست تطبيقًا لأنه ، على سبيل المثال، $(4 , 4) \in g$ و $(4 , -4) \in g$ ولكن $4 \neq -4$.

(جـ) h تطبيق على $\mathbb{Z}$.

مثال (٤,٣٥)

مدى التطبيق $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ المعرف بالقاعدة $f (x) = \frac{1}{x}$ هو $\mathbb{Q}^+$ لأن كل عدد كسري موجب هو مقلوب مقلوبه (أي أن $x = 1 / \frac{1}{x}$) .

لتكن لدينا علاقة التطابق قياس k المعرفة على $\mathbb{Z}$. لقد بيّنا أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$ وأن مجموعة فصول التكافؤ قياس k هي

$$\mathbb{Z}_k = \{ [0] , [1] , \dots , [k-1] \} .$$

لاحظ أيضًا أنه عند قسمة a على k فإننا نجد باستخدام خوارزمية القسمة عددين وحيدين n و r حيث إن $a = n k + r$ ، $0 \leq r < k$. سنرمز للعدد r بالرمز (a mod k) .

وإذا كان f تطبيقًا معرفًا على $\mathbb{Z}_k$ فإننا سنكتب $f [x]$ بدلا من $f ([x])$ ، وذلك ابتغاء السهولة .

مثال (٤,٣٦)

ليكن $f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f[x] = [2\,(x \bmod 3)]$. احسب Imf

الحل

$$f[0] = [2 \times (0 \bmod 3)] = [0]$$

$$f[1] = [2 \times (1 \bmod 3)] = [2]$$

$$f[2] = [2 \times (2 \bmod 3)] = [4 \,(\bmod 3)] = [1]$$

إذن ، $\text{Imf} = \mathbb{Z}_3$.

مثال (٤,٣٧)

ليكن $g : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ المعرف بالقاعدة $g[x] = [3\,(x \bmod 4)]$. احسب Img .

الحل

$$g[0] = [3 \times (0 \bmod 4)] = [0]$$

$$g[1] = [3 \times (1 \bmod 4)] = [3]$$

$$g[2] = [3 \times (2 \bmod 4)] = [2]$$

$$g[3] = [3 \times (3 \bmod 4)] = [1]$$

$$g[4] = [3 \times (4 \bmod 4)] = [0]$$

$$g[5] = [3 \times (5 \bmod 4)] = [3]$$

إذن ، $\text{Img} = \mathbb{Z}_4$.

مثال (٤,٣٨)

ليكن $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ المعــرف بالقــاعــدة $f(m, n) = \gcd(m, n)$.

احسب $f(3, 5)$ ، $f(24, 6)$ و $f(34, 14)$.

الحل

$$f(3, 5) = \gcd(3, 5) = 1$$
$$f(24, 6) = \gcd(24, 6) = 6$$
$$f(34, 14) = \gcd(34, 14) = 2$$

ليكن $f : A \longrightarrow B$ تطبيقا . من تعريف f نجد أن لكل $a \in A$ يوجد عنصر وحيد $b \in B$ حيث $(a, b) \in f$. ولكنه ليس من الضروري أن يوجد لكل $b \in B$ عنصر وحيد $a \in A$ حيث إن $(a,b) \in f$. في الحقيقة ، من الممكن أن يوجد لـ $b \in B$ أكثر من عنصر $a \in A$ ومن الممكن أن لايوجد أي $a \in A$ حيث إن $f(a) = b$. علَى سبيل المثال للتطبيق المعرف في المثال (٤,٣٧) يوجد لـ $[3] \in \mathbb{Z}_4$ عنصران هما $[1]$ و $[5]$ حيث إن $g[5] = g[1] = [3]$ ، وفي المثال (٤,٣٤) من الواضح أنه لايوجد $m \in \mathbb{Z}$ حيث إن $h(m) = 0$. وذلك لأن $h(m) = 2m + 1$ عدد فردي . إن هذا يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف (٤,٢٠)

ليكن $f : A \longrightarrow B$ تطبيقًا . نقول إن f أحادي أو متباين (one-to-one or injective) إذا حقق مايلي :

لكل $b \in B$ يوجد على الأكثر عنصر واحد $a \in A$ حيث إن $f(a) = b$.

من الممكن صياغة هذا الشرط بأي من العبارتين المتكافئتين التاليتين :

(i) لكل $a_1 , a_2 \in A$ ، إذا كان $f(a_1) = f(a_2)$ فإن $a_1 = a_2$.

(ii) لكل $a_1 , a_2 \in A$ ، إذا كان $a_1 \neq a_2$ فإن $f(a_1) \neq f(a_2)$.

ليكن $f: A \longrightarrow B$ تطبيقًا . ما العلاقة بين B و Imf ؟ من الواضح أن $Imf \subseteq B$.

من الممكـن أن تحتوي Imf على عنصر واحد فقط ومن الممكن أن تكون $Imf = B$ على سبيـل المثـال للتطبيق $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ المعرف بالقاعدة $f(m) = 2$ لكل $m \in \mathbb{Z}$ نجـد أن $Imf = \{2\}$. تسمى مثل هذه التطبيقات التطبيقات الثابتة . أما في التطبيق المعرف في المثال (٤,٣٧) فإننا نجد أن $Img = \mathbb{Z}_4$ ويسمى هذا التطبيق شاملا . وبصورة عامة لدينا :

تعريف (٤,٢١)

ليكن $f: A \longrightarrow B$ تطبيقًا . نقول إن f تطبيق شامل أو غامر (onto or surjective) إذا كان $Imf = B$. أي أنه لكـل $b \in B$ يوجد على الأقل $a \in A$ حيث إن $f(a) = b$.

ملاحظة

لإثبـات أن تطبيقًا مـا $f: A \longrightarrow B$ شـامل ، نأخـذ عنصـرًا اختيـاريًا $b \in B$ ونضـع $f(a) = b$ ، ثم نحاول حل هذه المعادلة لـ a وبحالة وجود حـل $a \in A$ يكـون التطبـيق شـاملا .

مثال (٤,٣٩)

ليكن $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f(m) = m-1$. هل f شامل ؟ هل هو متباين ؟

الحل

f شامل وذلك لأنه لكل $n\in\mathbb{Z}$ يوجد $m = n + 1\in\mathbb{Z}$ حيث إن $f(m) = f(n+1) = (n+1) - 1 = n$. f متباين وذلك لأنه إذا كان $m_1 , m_2\in\mathbb{Z}$ حيث إن $f(m_1) = f(m_2)$ فإن $m_1 - 1 = m_2 - 1$ ومن ، ثم فإن $m_1 = m_2$.

مثال (٤,٤٠)

ليكن $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f(m) = 2m + 1$. هل f متباين ؟

هل f شامل؟

الحل

f متباين وذلك لأنه لو كان $m_1 , m_2\in\mathbb{Z}$ فإن

$$f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow 2m_1 + 1 = 2m_2 + 1$$

$$\Rightarrow 2m_1 = 2m_2$$

$$\Rightarrow m_1 = m_2 .$$

f ليس شاملا وذلك لأن :

$$Imf = \{f(m) : m\in\mathbb{Z}\}$$

$$= \{2m+1 : m\in\mathbb{Z}\}$$

ومن ثم فإن Imf هي مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية وبالتالي f ليس شاملا .

مثال (٤,٤١)

ليكن $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ التطبيق المعرف بالقاعدة $g(m) = |m| + 1$. هل g متباين؟ هل هو شامل؟

الحل

g ليس متباينًا وذلك لأن $-2 \neq 2$ ولكن $g(2) = |2| + 1 = |-2| + 1 = 3 = g(-2)$.

g شامل وذلك لأنه لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ نجد أن :

$$g(m) = n \Leftrightarrow |m|+1 = n$$

$$\Leftrightarrow |m| = n - 1$$

$$\Leftrightarrow m = n-1 \text{ أو } m = 1-n$$

ومن ثم ، فإن كل $n \geq 2$ هو صورة للعنصرين n-1 و1-n . وأما n=1 فهو صورة للعنصر 0 وبذلك يكون f شاملا .

مثال (٤,٤٢)

ليكن $f : \mathbb{Q} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f(x) = \frac{x}{1-x}$. هل f متباين؟ هل هو شامل؟

الحل

نفرض أن $x_1, x_2 \in \mathbb{Q} - \{1\}$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2}$$

$$\Rightarrow x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1)$$

$$\Rightarrow x_1 - x_1 x_2 = x_2 - x_2 x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

ومن ثم ، فإن f متباين .

نفرض الآن أن $y \in \mathbb{Q}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y$$

$$\Leftrightarrow x = y(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x+xy = y$$

$$\Leftrightarrow x\,(1+y) = y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}\ ,\ y \neq -1$$

إذن، إذا كـان $y \neq -1$ فإن $x = \frac{y}{1+y} \in \mathbb{Q} - \{1\}$ وإن $f(x) = y$. أما إذا كـان $y = -1$ فإنه لايوجد $x \in \mathbb{Q} - \{1\}$ حيث إن $f(x) = -1$. إذن ، $\mathrm{Im} f = \mathbb{Q} - \{-1\} \neq \mathbb{Q}$ وبذلك يكون f ليس شاملا .

ملاحظة

إن كون تطبيق ما شاملا لا يعتمد فقط ، على القاعدة المعرف بها ولكنه يعتمد أيضًا على المجال والمجال المقابل لهـذا التطبيـق . فمثلا التطبيـق $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ المعـرف بالقـاعـدة $f(m) = 2m+1$ ليس شـامـلا (أنظر مـثـال (٤,٤٠)) . ولكننا لو اسـتـبـدلنا المجـال والمجـال المقـابل لهـذا التطبيق ليكون $\mathbb{Q}$ بدلا من $\mathbb{Z}$ فإن التطبيق يصبح شـامـلا وذلك لأنه لو كان $y \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x+1 = y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{Q}$$

ومن ثم ، فإن $f\left(\frac{y-1}{2}\right) = y$ وبذلك يكون التطبيق شاملا .

تعريف (٤,٢٢)

إذا كـان التطبـيـق $f : A \longrightarrow B$ شـامـلاً ومـتـبـاينًا فـإنـه يسـمى تقـابلا (bijective mapping) .

مبرهنة (٤,١٩)

إذا كانت كل من A و B مجموعة منتهية وتحتوي على n من العناصر وكان $f : A \longrightarrow B$ تطبيقاً فإن f متباين إذا وفقط إذا كان f شاملا .

البرهان

لنفرض أن $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

نفرض أولا أن f متباين . لاحظ أن

$$Imf = \{f(a) : a \in A\} = \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} .$$

إذا وجد i , j حيث إن $f(a_i) = f(a_j)$ فإن $a_i = a_j$ وذلك لأن f متباين ومن ثم، فإن $i = j$.

إذن ، $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ عناصر مختلفة في B . ومن ثم فإن $|Imf| = |B|$ وبالتالي ، فإن $Imf = B$ وبذلك يكون f شاملا .

ولبرهان العكس ، نفرض أن f شامل . إذن ، $Imf = B$ ومن ثم ، فإن $|Imf| = |B| = n$. إذن ، يجب أن تكون العناصر $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ مختلفة وبذلك يكون f متباينًا . Δ

المثال التالي يوضح أهمية المبرهنة (٤,١٩) .

مثال (٤,٤٣)

ليكن $f : \mathbb{Z}_{60} \longrightarrow \mathbb{Z}_{60}$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f[x] = [13 (x \bmod 60)]$.

أثبت أن f تقابل .

الحل

الآن . $[x], [y] \in \mathbb{Z}_{60}$

$$f[x] = f[y] \Rightarrow [13\,(x \bmod 60)] = [13\,(y \bmod 60)]$$
$$\Rightarrow [13x] = [13y]$$
$$\Rightarrow 60 \mid (13x - 13y)$$

إذن ، 60 يقسم $13(x-y)$. وبما أن $\gcd(13, 60) = 1$ فإن 60 يقسم $x - y$ ومن ثم ، فإن $[y] = [x]$ وبذلك يكون f متباينًا .

إذن ، باستخدام مبرهنة (٤,١٩) نجد أن f شامل أيضًا وبذلك يكون تقابلا .

تعريف (٤,٢٣)

ليكن $f : A \longrightarrow B$ تطبيقًا .

(i) إذا كانت $X \subseteq A$ فإننا نعرف صورة X بـ $f(X) = \{f(a) : a \in X\}$.

(ii) إذا كانت $Y \subseteq B$ فإننا نعرف الصورة العكسية لـ Y بـ

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}$$

لاحظ أن $Imf = f(A)$.

مثال (٤,٤٤)

إذا كان $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ هو التقابل $f(x) = 2x + 1$ فجد كلا من $f(\mathbb{Z}^+)$ و $f^{-1}(\mathbb{Z}^+)$

الحل

$f(\mathbb{Z}^+) = \{2x + 1 : x \in \mathbb{Z}^+\}$ أي أن $f(\mathbb{Z}^+)$ هي مجموعة الأعداد الفردية الموجبة التي هي أكبر من أو تساوي 3 .

$$y\in f^{-1}(\mathbb{Z}^+) \Leftrightarrow 2y+1\in\mathbb{Z}^+$$
$$\Leftrightarrow 2y+1=n\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{n-1}{2}\ ,\ n\in Z^+$$

إذن ، $f^{-1}(\mathbb{Z}^+)=\{\frac{n-1}{2} : n\in\mathbb{Z}^+\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$

مبرهنة (٤,٢٠)

ليكن $f : A \longrightarrow B$ تطبيقًا .

(i) إذا كانت $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ فإن $f(A_1)\subseteq f(A_2)$.

(ii) إذا كانت $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$ فإن $f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$.

البرهان

(i) لنفرض أن $x\in f(A_1)$. إذن ، $x=f(y)$ حيث $y\in A_1$ ، وبما أن $A_1\subseteq A_2$ فإن $y\in A_2$. إذن ، $x\in f(A_2)$ ومن ثم ، فإن $f(A_1)\subseteq f(A_2)$.

(ii)
$$x\in f^{-1}(B_1) \Leftrightarrow f(x)\in B_1$$
$$\Rightarrow f(x)\in B_2$$
$$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_2)$$

إذن ، $f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$. Δ

مبرهنة (٤,٢١)

إذا كان $f : A \longrightarrow B$ تطبيقا ، $A_1, A_2 \subseteq A$ و $B_1 , B_2 \subseteq B$ فإن :

(١) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$.

(٢) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

(٣) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(٤) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

البرهان

(١) بما أن $A_1 , A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ فإننا نجد باستخدام مبرهنة (٤,٢٠)، أن $f(A_1) , f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$ ومنه فإن $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$. ولبرهان العكس ، نفرض أن $y \in f(A_1 \cup A_2)$. $y = f(x)$ حيث $x \in A_1 \cup A_2$. ومنه فإن $y = f(x)$ حيث $x \in A_1$ أو $x \in A_2$. إذن ، $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ ومن ثم . فإن $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$.

(٢) بما أن $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ وأن $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$ فإن $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1)$ وإن $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2)$. إذن ، $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

(٣) لاحظ أن

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= \{x \in A : f(x) \in B_1 \cup B_2\} \\ &= \{x \in A : f(x) \in B_1 \text{ أو } f(x) \in B_2\} \\ &= \{x \in A : f(x) \in B_1\} \cup \{x \in A : f(x) \in B_2\} \\ &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

(٤) مشابه لبرهان (٣) . Δ

ملاحظة

لاحظ أنه ليس من الضروري أن يكون $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
فعلى سبيل المثال ، إذا كان $f(x) = x^2$ تطبيقًا على $\mathbb{Z}$ و $A_1 = \{2, 0\}$ ،

$A_2 = \{-2, 0\}$ فإن $f(A_1 \cap A_2) = \{0\} \neq \{0, 4\} = f(A_1) \cap f(A_2)$.

ولكننا نحصل على المساواة في الحالة التالية :

مبرهنة (٤,٢٢)

إذا كان $f: A \longrightarrow B$ تطبيقًا متباينًا وكانت $A_1, A_2 \subseteq A$ فإن $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

البرهان

لنفرض أن $x \in f(A_1) \cap f(A_2)$. إذن ، $x \in f(A_1)$ و $x \in f(A_2)$. ومنه فإن $x = f(y_1)$ و $x = f(y_2)$ حيث $y_1 \in A_1$ و $y_2 \in A_2$. إذن ، $f(y_1) = x = f(y_2)$ حيث $y_1 , y_2 \in A$. وبما أن f متباين فإن $y_1 = y_2$. إذن ، نجد أن $x = f(y)$ حيث $y \in A_1 \cap A_2$ ومن ثم فإن $x \in f(A_1 \cap A_2)$. Δ

ليكن لدينا التقابل $f: A \longrightarrow B$. بما أن f شامل فإنه لكل $y \in B$ يوجد على الأقل عنصر واحد $x \in A$ حيث إن $f(x) = y$. وبما أن f متباين فإن العنصر x يجب أن يكون وحيدًا . ومن ثم ، فإننا نستطيع تعريف تطبيق $g: B \longrightarrow A$ بدلالة f على النحو التالي :

$g(y) = x$ حيث x هو العنصر الوحيد في A حيث إن $f(x) = y$. يسمى التطبيق g معكوس f (inverse of f) ويرمز له بالرمز f^{-1} . لاحظ أن

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y .$$

مبرهنة (٤,٢٣)

إذا كان $f: A \longrightarrow B$ تقابلاً فإن $f^{-1}: B \longrightarrow A$ كذلك .

البرهان

لنفرض أن $f^{-1}(y_1) = x = f^{-1}(y_2)$ حيث $x \in A$ ، $y_1 , y_2 \in B$.

إذن ، $y_1 = f(x)$ و $y_2 = f(x)$ وبما أن f تطبيق فإننا نجد أن $y_1 = y_2$ ومن ثم فإن f^{-1} متباين . ولإثبات أن f^{-1} شامل ، نفرض أن $x \in A$. ليكن $y = f(x)$. إذن ، $x = f^{-1}(y)$ حيث $y \in B$ ومن ثم ، فإن f شامل . Δ

ملاحظة

إذا كان لدينا التقابل f فإن الخطوات التالية تساعدنا على إيجاد المعكوس f^{-1} :

(١) ضع $y = f^{-1}(x)$.

(٢) من تعريف f^{-1} ، نجد أن $x = f(y)$.

(٣) حل هذه المعادلة لإيجاد y بدلالة x إن أمكن ذلك .

مثال (٤٥ , ٤)

ليكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f(x) = x^3 - 2$. جد f^{-1} .

الحل

f تقابل (أثبت ذلك) . ومن ثم ، بوضع $y = f^{-1}(x)$ ، نجد أن $x = f(y)$.

الآن

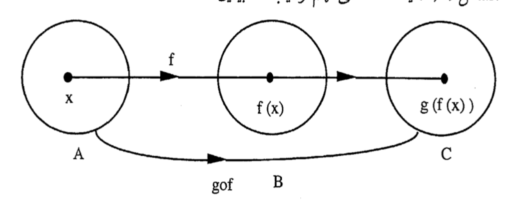
$$x = f(y) = y^3 - 2$$
$$\Rightarrow y^3 = x + 2$$
$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{x+2}$$

إذن ، $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$.

تعريف (٤,٢٤)

ليكن $f{:}A \longrightarrow B$ و $g{:}B \longrightarrow C$ تطبيقين. يسمى التطبيق $gof{:}A \longrightarrow C$ المعرف بالقاعدة: $(gof)(x) = g(f(x))$ لكل $x \in A$ تركيب (composition) التطبيقين f و g .

الشكل (٤,٦) يساعدنا على فهم تركيب التطبيقين



شكل (٤,٦)

مثال (٤,٤٦)

إذا كان $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفين على النحو التالي :

$f(x) = x^2$ و $g(x) = x + 1$ فإن

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 .$$

لاحظ أنه ليس بالضرورة أن يكون $fog = gof$.

مثال (٤,٤٧)

إذا كان $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفين على النحو التالي :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & , x \geq 0 \\ x^2 & , x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ x-1 & , x < 0 \end{cases}$$

فإن

$$f(g(x)) = \begin{cases} f(x) & , x \geq 0 \\ f(x-1) & , x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-x & , x \geq 0 \\ (x-1)^2 & , x < 0 \end{cases}$$

وإن

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(1-x) & , x \geq 0 \\ g(x^2) & , x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x & , x > 1 \\ 1-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & , x < 0 \end{cases}$$

مبرهنة (٤, ٢٤)

إذا كان $f: A \longrightarrow B$ ، $g: B \longrightarrow C$ و $h: C \longrightarrow D$ تطبيقات فإن

. ho (gof) = ho (gof)

البرهان

إذا كان $x \in A$ فإن

$$[ho\,(gof)]\,(x) = h\,[(gof)\,(x)]$$
$$= h\,[\,g\,(f\,(x))\,]$$
$$= (hog)\,(\,f\,(x)\,)$$
$$= [\,(hog)\,of\,]\,(x)$$

إذن ، $ho\,(gof) = (hog)\,of$. Δ

تعريف (٤,٢٥)

يسمى التطبيق $i_A : A \longrightarrow A$ المعرف بالقاعدة $i_A\,(x) = x$ لكل $x \in A$ التطبيق المحايد .

مبرهنة (٤,٢٥)

إذا كان $f : A \longrightarrow B$ تطبيقا فإن :

(i) $foi_A = f$. (ii) $i_B of = f$.

البرهان

متروك للقارىء . Δ

مبرهنة (٤,٢٦)

إذا كان $f : A \longrightarrow B$ تقابلا فإن

(i) $fof^{-1} = i_B$. (ii) $f^{-1}of = i_A$.

البرهان

متروك للقارىء . Δ

مبرهنة (٤,٢٧)

ليكن $f : A \longrightarrow B$ *تطبيقا . إذا وجد تطبيق* $g : B \longrightarrow A$ *حيث إن* $gof = i_A$ و $fog = i_B$ *فإن f تقابل وإن* $g = f^{-1}$.

البرهان

للبرهان على أن f متباين ، نفرض أن $x , y \in A$ حيث إن $f(x) = f(y)$.
إذن ، $g(f(x)) = g(f(y))$. وبما أن $gof = i_A$ فإننا نجد أن $x = y$ ومن ثم ، فإن f متباين .

لإثبات أن f شامل ، نفرض أن $y \in B$. بما أن $fog = i_B$ فإن $f(g(y)) = y$.
وبأخذ $x = g(y) \in A$ ، نجد أن $f(x) = y$ ومن ثم فإن f شامل . الآن

$$f^{-1} = f^{-1} oi_B = f^{-1} o (fog) = (f^{-1} of) og = i_A og = g \quad . \quad \Delta$$

نتيجة (١)

إذا كان $f : A \longrightarrow B$ *تقابلاً فإن* $(f^{-1})^{-1} = f$.

البرهان

بما أن $f^{-1} of = i_A$ و $fof^{-1} = i_B$ فإنه باستخدام مبرهنة (٤,٢٧) ، نجد أن f هو معكوس f^{-1} . أي أن $(f^{-1})^{-1} = f$. Δ

نتيجة (٢)

إذا كان كل من $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ تقابلاً فإن gof تقابل ومعكوسه $f^{-1} og^{-1}$.

البرهان

لاحظ أن

$$(gof)\,o\,(f^{-1}og^{-1}) = go\,[fo(f^{-1}og^{-1})\,]$$
$$= go\,[(fof^{-1})\,og^{-1}]$$
$$= go\,(i_B o\,g^{-1})$$
$$= gog^{-1}$$
$$= i_C$$

وبالمثل ، $(f^{-1}og^{-1})\,o\,(gof) = i_A$.

إذن، باستخدام مبرهنة (٤ , ٢٧)، نجد أن gof تقابل وأن $(gof)^{-1} = f^{-1}o\,g^{-1}$. Δ

تمارين (٤,٤)

في التمارين من ١ إلى ١٣ بين ما إذا كان التطبيق المعطى

(i) متباينًا (ii) شاملا (iii) تقابلا .

(١) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ ، $f(m) = m^2 + 1$.

(٢) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ، $f(x) = x^3$.

(٣) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ، $f(x) = x^3 - x$.

(٤) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x) = x^3 - x$.

(٥) $f : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$ ، $f[x] = [3\,(x \bmod 10)]$.

(٦) $f : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$ ، $f[x] = [5\,(x \bmod 10)]$.

(٧) $f : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$ ، $f[x] = [\,(x + 3) \bmod 10)]$.

(٨) $f : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$ ، $f[x] = [\,((x + 5) \bmod 10)]$.

(٩) $f: \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_8$ ، $f[x] = [2(x \bmod 8)]$.

(١٠) $f: \mathbb{Z}_8 \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ ، $f[x] = [3(x \bmod 12)]$.

(١١) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، $f(x) = (x-1, 1)$.

(١٢) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x) = x|x|$.

(١٣) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x) = x^2|x|$.

في التمارين من ١٤ إلى ١٦ ، أثبت أن التطبيق المعطى تقابل ثم جد معكوسه .

(١٤) $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ، $f(x) = 4x + 2$

(١٥) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ، $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$

(١٦) $f: \mathbb{Q} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{Q} - \{-1\}$ ، $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

(١٧) إذا كان $f: A \longrightarrow B$ و $g: B \longrightarrow C$ تطبيقين فأثبت ما يلي :

(أ) إذا كان gof متباينًا فإن f متباين .

(ب) إذا كان gof شاملا فإن g شامل .

(١٨) أعط مثالا لتطبيقين $f: A \longrightarrow B$ و $g: B \longrightarrow C$ حيث يكون كل من gof و f متباينًا ولكن g ليس متباينًا.

(١٩) أعط مثالا لتطبيقين $f: A \longrightarrow B$ و $g: B \longrightarrow C$ حيث يكون كل من gof و g شاملاً ولكن f ليس شاملا .

(٢٠) إذا كان $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ هما التطبيقان :

$$f(x) = \begin{cases} 4x+1 & , x \geq 0 \\ x & , x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x & , x \geq 0 \\ x+3 & , x < 0 \end{cases}$$

فأثبت أن gof تقابل ثم جد $(gof)^{-1}$. أثبت أن fog ليس متباينًا وليس شاملا .

(٢١) ليكن $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ التطبيق $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

أثبت أن f متباين ثم جد تطبيقين مختلفين $g , h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ حيث يكون $gof = hof = i_{\mathbb{R}^+}$.

(٢٢) ليكن $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ التطبيق المعرف بالقاعدة

$$f(n) = \begin{cases} n+3 & , \quad 3 \text{ يقسم } n \\ n & , \quad 3 \text{ لا يقسم } n \end{cases}$$

أثبت أن f تقابل ثم جد f^{-1} .

(٢٣) إذا كان $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ التطبيق المعرف بالقاعدة

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & , x \geq 0 \\ x(2-x) & , x < 0 \end{cases}$$

فأثبت أن f تقابل ثم جد f^{-1} .

(٢٤) ليكن $f : A \longrightarrow A$ تطبيقاً والعلاقة ~ معرفة على A بـ $a \sim b \Leftrightarrow b = f(a)$.

أثبت أن

(أ) $\sim$ انعكاسية إذا وفقط إذا كان $f = i_A$.

(ب) $\sim$ تناظرية إذا وفقط إذا كان $fof = i_A$.

(جـ) $\sim$ متعدية إذا وفقط إذا كان $fof = f$.

(٢٥) إذا كـان $f : A \longrightarrow A$ تطبيـقـا وكـانت $g = \{ (y, x) \in A \times A : y = f(x) \}$

فبرهن على أن gof علاقة تكافؤ .

(٢٦) ليكن $f : A \longrightarrow B$ تطبيقا والعلاقة R_f معرفة على A على النحو التالي :

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \, R_f \, y$$

برهن على أن R_f علاقة تكافؤ على A .

(٢٧) ليكن $f : \mathbb{Q} - \{\frac{1}{4}\} \longrightarrow \mathbb{Q} - \{0\}$ و $g : \mathbb{Q} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q} - \{\frac{3}{2}\}$ هما التطبيقان

المعرفان بـ $f(x) = 1 - 4x$ و $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x}$.

جد gof ، $(gof)^{-1}$ ، $f^{-1} o g^{-1}$.

(٢٨) ليكن $f : (-1, 1) \longrightarrow R$ تطبيقا معرفا بالقاعدة $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$. برهن على أن

f تقابل .

(٢٩) ليكن $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ تطبيقا معرفا بالقاعدة

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x < 0 \\ -2x & , x \geq 0 \end{cases}$$.

برهن على أن f تقابل .

(٣٠) ليكن $(a, b) \longrightarrow (0,1) : f$ حيث $a , b \in \mathbb{R}$ تطبيقا معرفا بالقاعدة $f(x) = (b-a)x + a$. برهن على أن f تقابل .

(٣١) إذا كان $f : A \longrightarrow B$ تطبيقًا ، $C \subseteq A$ و $D \subseteq B$ فأثبت أن :

(أ) $C \subseteq f^{-1}(f(C))$.

(ب) $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$.

(جـ) إذا كان f متباينًا فإن $f^{-1}(f(C)) = C$.

(د) إذا كان f شاملا فإن $f(f^{-1}(D)) = D$.

(هـ) $f^{-1}(B-D) = A - f^{-1}(D)$.

(و) $f(C) \cap D = f(C \cap f^{-1}(D)) = f(C) \cap f(f^{-1}(D))$.

الفصل الخامس

الجبريات البُولية وتطبيقاتها
BOOLEAN ALGEBRAS AND APPLICATIONS

يرجع الفضل في اكتشاف الجبريات البولية إلى العالم الرياضي جورج بول (George Boole). لقد كان اهتمام العالم بُول منصبًا على صياغة عملية التفكير المنطقي . ولقد بلور هذا الاهتمام بإصداره كتابًا في هذا الشأن عام ١٨٥٤م بعنوان " قوانين التفكير " (the laws of thought) . ولقد أسهم بول مساهمة فعالة في تطوير المنطق الرياضي حيث إنه استبدل الرموز المنطقية بالكلمات . وبعد مرور مايقارب القرن من الزمان لاحظ العالم شانون (Shannon) إمكانية استخدام الجبر البولي في تحليل ودراسة الدارات الكهربائية . ومنذ ذلك التاريخ أصبح الجبر البولي أداة أساسية لتحليل وتصميم الحواسيب . في هذا الفصل سوف نتطرق إلى العلاقة بين الجبر البولي والدارات المنطقية .

(٥,١) الجبريات البولية
Boolean Algebras

تعريف (٥,١)

لتكن B مجموعة غير خالية . إذا كان $f : B \longrightarrow B$ تطبيقًا فإننا نسمى f عملية أحادية *(unary operation)* على B .

مثال (٥,١)

لتكن $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية ، وليكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفًا بوساطة $f(x) = x^2$. عندئذ، تكون f عملية أحادية على $\mathbb{R}$.

تعريف (٥,٢)

لتكن B مجموعة غير خالية . إذا كان $f : B \times B \longrightarrow B$ تطبيقًا فإننا نسمي f عملية ثنائية (binary operation) على B .

ملاحظة

إذا كانت * عملية ثنائية على B فإننا نكتب صورة العنصر $(x, y) \in B \times B$ بالشكل $x * y$ عوضًا عن $*(x, y)$.

مثال (٥,٢)

لتكن $\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة . إذا كانت $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ دالة معرفة بوساطة $f(m,n) = m + n$ فإن f عملية ثنائية على $\mathbb{Z}$.

مثال (٥,٣)

لتكن X هي مجموعة جميع التقارير المركبة. التطبيق $f : X \times X \longrightarrow X$ المعرف بالقاعدة $f(A,B) = A \wedge B$ عملية ثنائية على X ، أما التطبيق $g : X \longrightarrow X$ المعرف بالقاعدة $g(A) = \neg A$ فهو عملية أحادية على X .

تعريف (٥,٣)

نقول إن النظام $B = (S, +, \cdot, ', 0, 1)$ حيث إن S مجموعة تحتوي على

عنصرين على الأقل ،+ . هما عمليتان ثنائيتان على المجموعة S و $'$ هي عملية أحادية على المجموعة S وحيث إن $0 \neq 1$ عنصران معينان في المجموعة S، جبر بولي إذا تحققت الخواص التالية لكل $x, y, z \in S$.

(١) الخاصتان التجميعيتان :

(أ) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ب) $(x.y).z=x.(y.z)$

(٢) الخاصتان الإبداليتان :

(أ) $x+y=y+x$ (ب) $x.y=y.x$

(٣) الخاصتان التوزيعيتان :

(أ) $x.(y+z)=x.y+x.z$ (ب) $x+(y.z)=(x+y).(x+z)$

(٤) خاصتا العنصرين المحايدين :

(أ) $x+0=x$ (ب) $x.1=x$

(٥) خاصتا المتمم :

(أ) $x+x'=1$ (ب) $x.x'=0$

مثال (٥,٤)

لتكن $B_2=\{0,1\}$. ولتكن + ، . ، ¬ معرفة كما هو مبين في الجدولين (٥,١) و (٥,٢) . اثبت أن $B=(B_2,+,.,\neg,0,1)$ جبر بولي .

جدول (٥,٢)

a	¬a
1	0
0	1

جدول (٥,١)

a	b	a + b	a . b
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

الحل

لكي نثبت أن B جبر بولي ، يجب أن نتحقق من صحة الخواص الخمسة المعطاة بالتعريف (٥,٣) ويتم ذلك بوساطة الجداول (طريقة الاستنفاد)، وسنترك ذلك كتمرين للقارىء .

مثال (٥,٥)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن S = P(X) . عندئذ ، إن B = (S, +, . , ' , 0 , 1) جبر بولي حيث إن

$$A+B=A\cup B, A.B=A\cap B, A'=A^c, 0=\phi, 1=X \cdot$$

مثال (٥,٦)

إذا كانت S هي مجموعة العبارات التقريرية المركبة فإن $B = (S, +, ., ', 0, 1)$ جبر بولي حيث إن $A+B=A\vee B, A.B=A\wedge B$ ، $A'=\neg A, 0=c, 1=t$.

ملاحظة

إذا كان B جبرًا بوليًا فإننا سنكتب أحيانًا xy بدلا من x.y تسهيلا للكتابة .

تعريف (٥,٤)

إذا كان x و x´ كما في التعريف (٥,٣) فإننا نسمي x´ عنصرًا متممًا للعنصر x .

مبرهنة (٥,١)

إذا كان $B = (S, +, ., ', 0, 1)$ جبرًا بوليًا وكان x´ عنصرًا متممًا للعنصر x فإن x´ عنصر وحيد

البرهان

لنفرض أن y عنصر متمم آخر للعنصر x إذن $x + y = 1$ و $x. y = 0$. عندئذ :

$y = y . 1$	(خاصة ٤)
$= y (x + x')$	(خاصة ٥)
$= y x + y x'$	(خاصة ٣)
$= x y + y x'$	(خاصة ٢)
$= 0 + y x'$	(من الفرض)
$= x x' + y x'$	(خاصة ٥)
$= x' x + x' y$	(خاصة ٢)
$= x' (x + y)$	(خاصة ٣)
$= x' .1$	(من الفرض)
$= x'$	(خاصة ٤) Δ

تعريف (٥,٥)

كل عبارة مؤلفة من متغيرات بولية ومن العمليات البولية + ، . ، ' وذات معنى تسمى عبارة بولية . لتكن E عبارة ولتكن $E^•$ هي العبارة التي نحصل عليها من العبارة E باستبدال 0 بـ 1 ، 1 بـ 0 ، + بـ . ، . بـ+ . عندئذ ، نقول إن $E^•$ هي العبارة الثنوية (dual) للعبارة E .

مثال (٧, ٥)

إذا كانت $E: (x + y)' = x' y'$ فإن $E^• : (xy)' = x' + y'$. وإذا كانت $E : x + 1 = 1$ فإن $E^• : x.0 = 0$.

لاحظ أن كل خاصية من الخواص في التعريف (٣ , ٥) مكونة من عبارتين ثنويتين.

مبرهنة (٥,٢) (مبدأ الثنوية)

إذا كانت T مبرهنة في جبر بولي فإن T^* مبرهنة أيضًا.

البرهان

لتكن T مبرهنة في الجبر البولي . عندئذ ، يوجد برهان P للمبرهنة T حيث يستخدم P الخواص المذكورة في التعريف (٥,٣) . لنفرض أن P^* هي مجموعة التقارير التي نحصل عليها من البرهان P بوساطة تبديل كل من عبارات P بالعبارات الثنوية لها . عندئذ ، إن P^* هو برهان للمبرهنة T^* . Δ

المبرهنةالتالية تزودنا ببعض الخواص الأساسية للجبر البولي.

مبرهنة (٥,٣)

ليكن $B = (S, +, ., ', 0, 1)$ جبرًا بوليًا ، وليكن $x, y \in S$. عندئذ ، إن :

(١)	(أ)	$x + x = x$	(ب)	$x . x = x$
(٢)	(أ)	$x + 1 = 1$	(ب)	$x . 0 = 0$
(٣)	(أ)	$x + xy = x$	(ب)	$x (x + y) = x$
(٤)		$(x')' = x$		
(٥)	(أ)	$0' = 1$	(ب)	$1' = 0$
(٦)	(أ)	$(x + y)' = x' y'$	(ب)	$(xy)' = x' + y'$

البرهان

لاحظ أن جميع الخواص المعطاة مكونة من عبارة بولية وثنويتها وبناءً على مبرهنة (٢ , ٥) فإنه يكفي أن نبرهن إحدى العبارتين في كل حالة .

(١) (أ) $x = x + 0$ (خاصة ٤)

$= x + (x x')$ (خاصة ٥)

$= (x + x)(x + x')$ (خاصة ٣)

$= (x + x) . 1$ (خاصة ٥)

$= x + x$ (خاصة ٤)

(٢) (أ) $x + 1 = (x + 1) . 1$ (خاصة ٤)

$= (x + 1)(x + x')$ (خاصة ٥)

$= x + (1 . x')$ (خاصة ٣)

$= x + (x' . 1)$ (خاصة ٢)

$= x + x'$ (خاصة ٤)

$= 1$ (خاصة ٥)

(٣) (أ) $x + xy = x . 1 + xy$ (خاصة ٤)

$= x(1 + y)$ (خاصة ٣)

$= x(y + 1)$ (خاصة ٢)

$= x . 1$ (الفقرة ٢)

$= x$ (خاصة ٤)

(٤) بما أن $x + x' = 1$ و $x . x' = 0$ وباستخدام وحدانية المتمم نحصل على $(x')' = x$.

(٥) بما أن $1 + 1 = 1 + 0$ وأن $0 = 0.1$ فإن $1 = {}'0$ و$0 = {}'1$.

(٦) (أ) $(x+y)(x'y') = x'y'(x+y)$ (خاصة ٢)

$= (x'y')x + (x'y')y$ (خاصة ٣)

$= x(x'y') + (x'y')y$ (خاصة ٢)

$= (xx')y' + x'(yy')$ (خاصة ١)

$= 0.y' + x'.0$ (خاصة ٥)

$= 0 + 0$ (الفقرة ٢)

$= 0$ (خاصة ٤)

وكذلك

$(x+y) + x'y' = [(x+y) + x'][(x+y)+y']$ (خاصة ٣)

$= [(y+x) + x'][(x+y) + y']$ (خاصة ٢)

$= [y + (x + x')][x + (y + y')]$ (خاصة ١)

$= (y+1)(x+1)$ (خاصة ٥)

$= 1.1$ (الفقرة ٢)

$= 1$ (خاصة ٤)

من وحدانية المتمم نستنتج أن :

$x'y' = (x+y)'$. Δ

تمارين (١ , ٥)

(١) لتكن $S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. ولنعرف $x + y = \text{Lcm}(x,y)$ ، $x.y = \text{gcd}(x,y)$ و $x' = 30/x$ أثبت أن $B = (S, +, ., ', 1, 30)$ جبر بولي .

(٢) لتكن $S = \{1,2,4,8\}$. ولتكن + ، . كما هي معرفة في التمرين (١) ، $x'=8/x$
أثبت أن $B = (S, +, ., ', 1, 8)$ ليس جبراً بوليًا.

(٣) إذا كان $B = (S, +, ., ', 0, 1)$ جبراً بوليا وكانت S مجموعة منتهية فبرهن أن عدد عناصر S يجب أن يكون زوجيًا.

(٤) إذا كان $B = (S, +, ., ', 0, 1)$ جبراً بوليًا وكانت $A \subseteq S$ ، حيث إن $1 \in A$ وإذا كان $x, y \in A$ فإن $xy' \in A$ أثبت أن $(A, +, ., ', 0, 1)$ جبر بولي.

(٥) إذا كان $B = (S, +, ., ', 0, 1)$ جبراً بوليا وكانت $a,b,c \in S$ حيث إن $a+c = b+c$ و$a.c = b.c$ فأثبت أن $a = b$.

(٦) إذا كان $B = (S, +, ., ', 0, 1)$ جبراً بوليًا وكانت $a, b, c \in S$ حيث إن $a.b = a.c$ و $a'.b = a'.c$ فأثبت أن $b = c$.

(٧) ليكن $B = (S, +, ., ', 0, 1)$ جبراً بوليًا. ولتكن العلاقة $\leq$ معرفة على S كالتالي:

$a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $ab = a$. أثبت أن $(S, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيًا.

(٨) ليكن $B = (S, +, ., ', 0, 1)$ جبراً بوليًا وليكن $a \in S$ حيث إن $a \neq 0$.
لتكن $\leq$ هي العلاقة المعرفة في التمرين (٧) . نقول إن a ذرة إذا تحقق الشرط التالي:

إذا كان $b \leq a$ حيث إن $b \in S$ فإنه إما أن يكون $b = 0$ أو $b = a$.

(أ) أثبت أن $a \in S$ ذرة إذا وفقط إذا كان لكل $b \in S$ إما أن يكون $a \leq b$ أو $a.b = 0$.

(ب) جد جميع العناصر التي تكون ذرات في الجبر البولي المعطى في التمرين (١).

(٥ , ٢) الدوال البولية
Boolean Functions

في بند قادم من هذا الفصل ، سنتطرق إلى بعض التطبيقات لعمليات الجبر البولي على الدارات المنطقية ، وسنرى أنه كلما كانت الدوال البولية معطاة بشكل بسيط كلما استطعنا الحصول على دارات منطقية أفضل نسبيًا . في هذا البند سنقدم الخطوة الأولى في إتجاه تبسيط الدوال البولية .

تعريف (٥,٦)

ليكن $B = (B_2, +, \cdot, ', 0, 1)$ *هو الجبر البولي المعرف في المثال (٥,٤)* *ولتكن* $B_2^n = \{(a_1,\ldots,a_n): a_i \in B_2\}$ *حيث إن* $n \geq 1$. *يسمى التطبيق* $f: B_2^n \rightarrow B_2$ *دالة بولية .*

إن أفضل طريقة لوصف دالة بولية هي أن ننشيء جدول الصواب لهذه الدالة ، فعلى سبيل المثال ، الجدول (٥,٣) يعطينا وصفًا تامًا للدالة $f(x,y) = x'y + x$.

جدول (٥ , ٣)

x	y	x'y	f(x,y)
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	0	0

من المهم جداً أن نلاحظ أنه يوجد جدول واحد فقط لكل دالة بولية ، ولكن

من المحتمل أن توجد دالتان مختلفتان في عبارتيهما ولكن لهما نفس الجدول . وبناء على ذلك نريد أن نعرف متى تكون دالتان متساويتين ، وهذا مايزودنا به التعريف التالي .

تعريف (٥,٧)

نقول إن الدالتين البوليتين $f1$ و $f2$ ، متساويتان (أو متكافئتان) إذا كان لهما نفس الجدول أو إذا استطعنا أن نحصل على أحدهما من الأخرى جبريًا باستخدام خواص الجبر البولي .

مثال (٥,٨)

أثبت أن $(x + y).(x' + y) = y$ مستخدمًا الجداول وخواص الجبر البولي .

الحل

جدول (٥,٤)

x	y	x + y	(x' + y)	(x + y). (x' + y)
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

بمقارنة العمود الثاني من جدول (٥,٤) والعمود الخامس نجد أن الدالتين متساويتان . أما إذا أردنا أن نستخدم خواص الجبر البولي فإننا نحصل على :

$(x + y).(x' + y) = (y + x).(y + x')$ (خاصة ٢)

$= y + (x.x')$ (خاصة ٣)

$= y + 0$ (خاصة ٥)

$= y$ (خاصة ٤)

ليكن لدينا جدول مكون من 2^n من الصفوف . هل نستطيع أن نجد دالة بولية في n من المتغيرات حيث يكون جدولها هو الجدول المعطى ؟ المبرهنة التالية تجيبنا على هذا السؤال .

مبرهنة (٥,٤)

إذا كان لدينا جدولا مكونًا من 2^n من الصفوف (الأسطر) فإننا نستطيع الحصول على دالة بولية في n من المتغيرات حيث يكون لها جدول الصواب المعطى .

البرهان

لنفرض أن المتغيرات البولية المعطاة في الجدول هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$. إذا كانت جميع القيم في العمود الأخير من الجدول هي " 0 " فإننا نعرف الدالة f كالتالي: $f = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \ldots + x_nx'_n$. إذن نستطيع أن نفرض وجود القيمة "1" في الأماكن التي تتقاطع فيها بعض الصفوف مع العمود الأخير. لكل صف من هذه الصفوف نكتب الجداء (أي حاصل الضرب) $y_1 y_2 \ldots y_n$ حيث $y_i = x_i$ إذا كانت قيمة x_i في هذا الصف هي "1" ، $y_i = x'_i$ إذا كانت قيمة x_i في هذا الصف هي " 0 ". وعليه فإن الدالة المطلوبة هي الدالة المكونة من مجموع جميع الجداءات . Δ

لاحظ أن الدالة التي حصلنا عليها من النظرية (٥,٤) لها صفة خاصة متضمنة في التعريف التالي :

تعريف (٥,٨)

(أ) لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغيرات بولية . يسمى *الجداء* $y_1 y_2 \ldots y_n$ حيث $y_i = x_i$ أو $y_i = x_i'$ لكل $1 \le i \le n$ *حد أصغري في* n *من المتغيرات* .

(ب) *لتكن f دالة بولية في n من المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$. نقول إن f على شكل مجموع جداءات تام (CSP) إذا كانت عبارة عن مجموع حدود أصغرية في n من المتغيرات .*

مبرهنة (٥,٥)

يمكن كتابة أية دالة بولية غير الصفرية على شكل مجموع جداءات تام ، وهذا الشكل وحيد إذا تجاهلنا ترتيب الجداءات .

البرهان

بما أن الدالة غير صفرية فإنه يوجد على الأقل قيمة واحدة في العمود الأخير لجدول الصواب لهذه الدالة تساوي " 1 " . باستخدام طريقة برهان المبرهنة (٥,٤)، نستطيع أن نكتب الدالة على شكل مجموع جداءات تام . Δ

مثال (٥,٩)

أكتب f على شكل CSP حيث إن $f(x, y, z) = x.y + z'$.

الحل

جدول (٥,٥)

x	y	z	x.y	x.y+z'	الحدود الأصغرية
1	1	1	1	1	xyz
1	1	0	1	1	xy z'
1	0	1	0	0	
1	0	0	0	1	xy' z'
0	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	x' y z'
0	0	1	0	0	
0	0	0	0	1	x' y' z'

من الجدول (٥,٥) ، نجد أن : $f = xyz + xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$

ملاحظة

من الممكن أيضًا أن نستخدم خواص الجبر البولي عندما نريد أن نكتب f على شكل CSP كما هو موضح في المثال التالي :

مثال (١٠,٥)

لتكن f هو الدالة المعطاة في المثـــال (٩,٥) . اكـــتب f على شكـل CSP مستخدمًا خواص الجبر البولي.

الحل

$$
\begin{aligned}
f = x.y + z' &= x.y\,(z + z') + (y + y')\,z' \\
&= x\,y\,z + x\,y\,z' + y\,z' + y'\,z' \\
&= x\,y\,z + x\,y\,z' + (x + x')\,y\,z' + (x + x')\,y'\,z' \\
&= x\,y\,z + x\,y\,z' + x\,y\,z' + x'\,y\,z' + x\,y'\,z' + x'\,y'\,z' \\
&= x\,y\,z + x\,y\,z' + x'\,y\,z' + x\,y'\,z' + x'\,y'\,z'
\end{aligned}
$$

بالاستناد إلى مبدأ الثنوية للجبريات البولية نستطيع أن نستنتج أنه إذا كان بإمكاننا كتابة الدالة البولية f على شكل CSP فإنه بإمكاننا أن نكتب f على شكل جداء مجاميع تام (CPS) . وهذا يتم كالتالي : نجد جدول الصحة للدالة f ثم نعتبر الصفوف التي تكون فيها قيمة الدالة f هي 0 . لكل من هذه الصفوف نجد الحد الأعظمي المقابل وهو على الشكل $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ حيث $y_i = x_i'$ إذا كانت $x_i = 1$ في الصف المعتبر و $y_i = x_i$ إذا كانت $x_i = 0$ في الصف المعتبر . ثم نجد جداء الحدود الأعظمية التي حصلنا عليها .

مثال (٥,١١)

لتكن f هي الدالة المعطاة في المثال (٥,٩) . اكتب f على شكل CPS .

الحل

من الجدول (٥,٥) نجد أن الحدود الأعظمية هي :

$x+y+z'$ ، $x+y'+z'$ ، $x'+y+z$.

وعليه ، فإن :

$$f=(x'+y+z')(x+y'+z')(x+y+z') .$$

من الجدير بالذكر أننا نستطيع الحصول على الشكل CPS بوساطة استخدام الشكل CSP . وهذه الطريقة تعتمد على المبرهنة التالية :

مبرهنة (٥,٦)

لتكن f دالة بولية في n من المتغيرات . لنفرض أن f كتبت على شكل CSP كما يلي : $f=m_1+m_2+\dots+m_k$

عندئذ ، إن $f'=m_1'\,.\,m_2'\,.\,\cdots\,m_k'$ *هو شكل CPS للدالة* f' .

البرهان

لنفرض أن $m_i=y_1\,y_2\,\dots y_n$ حيث y_i إما أن يكون x_i أو x_i' . عندئذ ، إن $m_i'=y_1'+y_2'\,\dots+y_n'$ حيث y_i' إما أن يكون x_i' أو x_i . وبالتالي فإن $f'=(m_1+m_2+\dots+m_k)'=m_1'\,.\,m_2'\,.\,\cdots\,m_k'$ هو شكل CPS للدالة f . ∆

الخوارزمية التالية تكتب لنا f على شكل CPS .

خوارزمية (٥,١)

لتكن f دالة بولية معطاة . من أجل كتابة f على شكل CPS ، نَفِّذ الخطوات التالية :

(١) جد f' (أو جدول الصواب لـ f') ،

(٢) اكتب f' على شكل CSP ،

(٣) جد $f = (f')'$ مستخدماً نتيجة الخطوة (٢) .

مثال (٥,١٢)

اكتب f على شكل CPS حيث f هي الدالة المعطاة في المثال (٥,٩) ، مستخدماً الخوارزمية (٥,١) .

الحل

بما أن $f(x, y, z) = xy + z'$ فإن $f' = (xy + z')' = (x' + y')z$

جدول (٥,٦)

x	y	z	$x' + y'$	f'	الحدود الأصغرية
1	1	1	0	0	
1	1	0	0	0	
1	0	1	1	1	$xy'z$
1	0	0	1	0	
0	1	1	1	1	$x'yz$
0	1	0	1	0	
0	0	1	1	1	$x'y'z$
0	0	0	1	0	

إذن $f' = xy'z + x'yz + x'y'z$

وبالتالي ، فإن :

$$f = (f')'$$
$$= (xy'z + x'yz + x'y'z)'$$
$$= (x' + y + z)(x + y' + z')(x + y + z')$$

ملاحظات

(١) لاحظ أنه يمكننا الحصول على f' من جدول الصواب لـ f باستبدال كل 0 بـ 1 وكل 1 بـ 0 .

(٢) من الممكن استخدام خواص الجبر البولي من أجل كتابة f على شكل CPS وهذا مايوضحه المثال التالي :

مثال (٥,١٣)

استخدام خواص الجبر البولي لكتابة f على شكل CPS حيث f هي الدالة المعطاة في مثال (٥,٩) .

الحل

$$f = xy + z'$$
$$f' = (x' + y')z$$
$$= x'z + y'z$$
$$= x'(y + y')z + (x + x')y'z$$
$$= x'yz + x'y'z + xy'z + x'y'z$$
$$= x'yz + x'y'z + xy'z$$

وبالتالي ، فإن

$$f=(f')'$$
$$=(x'yz+x'y'z+xy'z)'$$
$$=(x+y'+z')(x+y+z')(x'+y+z')$$

تمارين (٥,٢)

في التمارين من ١ إلى ١٠ ، اكتب f على شكل CSP واكتب f على شكل CPS مستخدما جداول الصواب .

(١) $f(x, y) = xy$

(٢) $f(x) = x$

(٣) $f(x, y, z) = xy + (x+y)'z$

(٤) $f(x, y, z) = xy(x'+z)'$

(٥) $f(x, y, z) = (x+y+z)(xyz)$

(٦) $f(x, y, z) = (xy)'z + x'z + xy(y'+z')'$

(٧) $f(x, y, z) = (x+y)'(x+z)$

(٨) $f(x, y, z) = yz + xz$

(٩) $f(x, y, z, w) = (x+y'+z)(x'+y+w)$

(١٠) $f(x, y, z, w) = xy(x'+w)(y'+z)$

(١١) أعد التمارين من ١ إلى ١٠ مستخدمًا خواص الجبر البولي .

(٥,٣) أشكال كارنو
Karnaugh Maps

إن الهـدف الأسـاسي من هـذا البند هو إيجاد صيغة بسيطة مكافئة لدالة بولية مـعطاة . إن الطـريقـة العـامـة التـي تتيـــح لنـا ذلـك تعـــرف بطريقـة كـويـن

ومكلوسكي (Quine - Mc Clusky)، ويمكن استخدامها لأيّة دالة بولية ، ولكن وصف هذه الطريقة صعب نسبيًا . وهناك طريقة بديلة تعرف بطريقة أشكال كارنو وقد أكتشفها العالم موريس كارنو (Maurice Karnaugh) .

سوف نستخدم أشكال كارنو لتبسيط الدوال البولية في متغيرين أو ثلاثة متغيرات أو أربعة متغيرات . ولكن قبل ذلك دعنا نعرف ماذا نعني بدالة بولية بسيطة .

تعريف (٥,٩)

إذا كانت $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ متغيرات بُولية فإن كل عنصر من عناصر المجموعة $\{x_1 , \dots , x_n , x_1' , \dots x_n'\}$ يسمى حرفًا بُوليًا .

مثال (٥,١٤)

الأحرف البولية للدالة $f(x,y,z) = xyz + x'yz + x'y$ هي : $x , y , z , x' , y , z , x' , y$ وعددها 8 . لاحظ أننا عندما نجد عدد الأحرف البولية لدالة فإننا نعد تكرار الأحرف .

تعريف (٥,١٠)

لتكن f و g دالتين بوليتين متكافئتين ، ولتكن كل منهما على شكل مجموع جداءات (ليس تامًا بالضرورة) . نقول إن f أبسط من g إذا كان:

(أ) عدد أحرف f أقل من عدد أحرف g وعدد حدود f أقل من أو يساوي عدد حدود g . **أو**

(ب) عدد حدود f أقل من عدد حدود g وعدد أحرف f أقل من أو يساوي عدد أحرف g.

مثال (٥,١٥)

الدالة $f = xy'w + y'z'w + xyz'$ أبسط من الدالة $g = xy'zw + y'z'w + xy'z'w'$ لأن f تحتوي على 9 أحرف أما g فإنها تحتوي على 11 حرفًا .

تعريف (٥,١١)

لتكن f دالة بولية . نقول إن f على شكل مجموع جداءات أصغري (MSP) إذا حققت الشرطين :

(١) f على شكل مجموع جداءات .

(٢) إذا كانت g دالة أخرى على شكل مجموع جداءات ومكافئة للدالة f فإن g ليست أبسط من f .

مثال (٥,١٦)

اكتب الدالة $f(x, y, z) = xz + y'z + xz'$ على شكل MSP .

الحل

$$xz + y'z + xz' = x(z + z') + y'z$$
$$= x + y'z$$

الدالة $x + y'z$ تحتوي على حدين وثلاثة أحرف . ومن السهل البرهان على أنه إذا كانت g دالة على شكل مجموع حرفين أو على شكل جداء أحرف فإن g غير مكافئة للدالة $f = x + y'z$. إذن $f = x + y'z$ هو شكل MSP للدالة f .

ملاحظة

بأستخدام التعريف (٥,١١) ومبدأ الثنوية نستطيع أن نعرف ماذا نعني بقولنا إن الدالة f على شكل جداء مجاميع أصغري (MPS) .

الآن نستطيع أن نقدم أشكال كارنو . إن شكل كارنو في متغيرين هو ببساطة عبارة عن مربع مقسوم إلى أربعة مربعات متساوية في المساحة تسمى خلايا . وكل خلية من هذه الخلايا الأربع تقابل حدا أصغريا في متغيرين مختلفا عن الحدود الأصغرية لباقي الخلايا . وبما أنه يوجد $4 = 2^2$ حدود أصغرية في متغيرين فإننا نستنتج أن الخلايا الأربع تغطي جميع الحدود الأصغرية التي يمكن تكوينها كما هو موضح في الشكل (٥,١) .

	y	y'
x		
x'		

شكل (١ . ٥)

	yz	yz'	y'z'	y'z
x				
x'				

شكل (٢ . ٥)

وبالطريقة نفسها فإن شكل كارنو في ثلاثة متغيرات عبارة عن مستطيل مقسوم إلى ثماني خلايا ، خلية واحدة لكل حد أصغري كما هو مبين في الشكل (٥,٢) ،

وكذلك فإن شكل كارنو في أربع متغيرات عبارة عن مربع مقسوم إلى ستّ عشرة خلية كما هو مبين في الشكل (٥,٣) .

	zw	zw'	z'w'	z'w
xy				
xy'				
x'y'				
x'y				

شكل (٥ ,٣)

إذا كان لدينا دالة بولية f مكتوبة على شكل CSP ، فإننا ننشئ شكل كارنو لهذه الدالة كما يلي : نرسم شكل كارنو في عدد مناسب من المتغيرات ثم نكتب 1 في كل واحدة من الخلايا التي تقابل الحدود الأصغرية للدالة f .

مثال (٥,١٧)

شكل كارنو المبين في الشكل (٥ ,٤) هو شكل كارنو للدالة $f(x, y, z) = xyz + xy'z + x'yz'$.

	yz	yz'	y'z'	y'z
x	1			1
x'		1		

شكل (٤ . ٥)

أما شكل كارنو المبين في الشكل (٥,٥) فهوعبارة عن شكل كارنو للدالة

$$f = xyzw + xyzw' + xy'z'w' + xy'z'w + x'y'z'w \,.$$

	zw	zw'	z'w'	z'w
xy	1	1		
xy'			1	1
x'y'				1
x'y				

شكل (٥ . ٥)

تعريف (٥,١٢)

نقول عن خليتين من خلايا شكل كارنو إنهما متجاورتان إذا كان الحدان الأصغران المقابلان لهما يختلفان في حرف واحد فقط .

ملاحظات

(١) كل خلية من خلايا شكل كارنو في n من المتغيرات يجب أن يكون لها n من الخلايا المجاورة .

(٢) يختلف الحد الأصغري المقابل لخلية من خلايا شكل كارنو عن الحد الأصغري المقابل لخلية مجاورة لتلك الخلية في متغير واحد فقط ، ويظهر هذا المتغير في واحد من هذين الحدّين بينما يظهر متممه في الحد الآخر .

(٣) نلاحظ في شكل كارنو في ثلاثة متغيرات أنه إذا كانت c_1 و c_2 خليتين متجاورتين فإنهما متلاصقتان أو تقعان في طرفي صف .

(٤) نلاحظ في شكل كارنو في أربعة متغيرات نلاحظ أنه إذا كانت c_1 و c_2 خليتين متجاورتين فإنهما متلاصقتان أو تقعان في طرفي صف أو تقعان في طرفي عمود .

المبرهنة التالية توضح لنا أهمية التجاور .

مبرهنة (٥,٧)

إذا كانت f دالة بولية فإن $f = fx + fx'$.

البرهان

$$fx + fx' = f\,(x + x') = f1 = f \quad . \quad \Delta$$

مثال (٥,١٨)

بسّط الدالة البولية $f = xyz'w' + xy'z'w + xy'z'w + xyz'w$.

الحل

$$xyz'w' + xy'z'w + xy'z'w + xyz'w$$
$$= xz'w'(y+y') + xz'w(y'+y)$$
$$= xz'w' + xz'w$$
$$= xz'(w'+w)$$
$$= xz'$$

ملاحظة

لاحظ أن الحدود الأربعة الأصغرية في الدالة المعطاة في مثال (٥,١٨) تقابل خلايا متجاورة في شكل كارنو ولذلك استطعنا تبديل مجموعها بحد واحد فقط. إن ماقمنا به جبرياً هنا نستطيع أن نقوم به بمساعدة شكل كارنو .

تعريف (٥,١٣)

إذا كان لدينا شكل كارنو فإن أيا من التالي يسمى مستطيلا أساسيا .

(١) *خلية واحدة تحتوي على 1 .*

(٢) *خليتان متجاورتان تحتوي كل منها على 1 .*

(٣) *أربع خلايا تحتوي كل منها على 1 وتكون مستطيلا من النوع 1X4 أو من النوع 4X1 أو من النوع 2X2 .*

(٤) *ثماني خلايا تحتوي كل منها على 1 وتكون مستطيلا من النوع 2 X 4 او من النوع 4 X 2 .*

ملاحظة

لاحظ أنه من الممكن أن يكون هناك مستطيلان أساسيان حيث يحتوي أحدهما على الآخر.

تعريف (٥,١٤)

يسمى المستطيل الأساسي مستطيلا أعظميا إذا لم يوجد مستطيل أساسي آخر يحتوي عليه.

ملاحظة

إذا كانت f دالة بولية مكتوبة على شكل CSP ، فإن كل مستطيل أعظمي في شكل كارنو للدالة f يقابل مجموعا من الحدود الأصغرية وهذا المجموع يمكن تبسيطه وتبديله بحد واحد .

تعريف (٥,١٥)

لتكن f دالة بولية مكتوبة على شكل CSP ، وليكن r مستطيلاً أعظميًا في شكل كارنو للدالة f . من الملاحظة المذكورة أعلاه نعلم أننا نستطيع أن نقرن r بحد واحد . يسمى هذا الحد حدًا مُقتضيًا أوّليًا للدالة f.

ملاحظة

ليكن r مستطيلا أعظميا. إن الحد المقتضى الأولي الذي يقابل r يساوي حاصل ضرب جميع الأحرف البُولية التي يظهر كل منها في جميع الخلايا التي تكوّن المستطيل r .

مثال (٥,١٩)

جد الحدود المقتضية الأولية للدالة :

$$f = xyzw + xyz'w' + xy'zw + xy'zw' + xy'z'w' + xy'z'w.$$

الحل

ننشيء شكل كارنو للدالة ونحيط المستطيلات الأعظمية بمنحنيات مغلقة كما هو مبين بالشكل (٥,٦) .

	zw	zw'	z'w'	z'w
xy	1		1	
xy'	1	1	1	1
x'y'				
x'y				

شكل (٥،٦)

ومن الشكل (٥,٦) نستنتج أن الحدود المقتضية الأولية هي :

$. xy' , xzw , xz'w'$

الخوارزمية التالية تزودنا بطريقة لكتابة دالة بولية على شكل MSP وذلك عن طريق استخدام أشكال كارنو .

خوارزمية (٥,٢)

لتكن f دالة بولية معطاة. من أجل كتابة f على شكل MSP نَفِّذ الخطوات

التالية :

(١) أكتب f على شكل CSP .

(٢) أنشيء شكل كارنو للدالة f .

(٣) جد أصغر عدد من المستطيلات الأعظمية التي تحتوي على جميع خلايا الدالة .

(٤) جد الحدود المقتضية الأولية التي تقابل المستطيلات الأعظمية التي حصلت عليها في الخطوة (٣) .

(٥) اكتب مجموع الحدود المقتضية الأولية التي حصلت عليها في الخطوة (٤) . [إن هذا المجموع هو شكل MSP للدالة f] .

ملاحظة

في حالة تعدد " أصغر عدد من المستطيلات الأعظمية التي تحتوي على جميع خلايا الدالة " فإننا نختار المستطيلات التي تعطينا العدد الأصغر من الأحرف .

مثال (٥,٢٠)

في ما يلي ، اكتب f على شكل MSP مستخدماً الخوارزمية (٥,٢) .

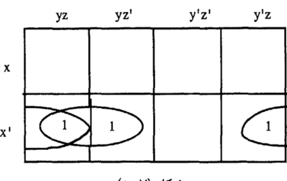
(أ) $f = x'yz + x'y'z + x'yz'$.

(ب) $f = xyzw + xyz'w + xy'zw + xy'z'w$

$+ xyzw' + x'yzw + x'yzw'$

الحل

(أ)



شكل (٥ . ٧)

من الشكل (٥,٧) ، نجد أن الحدود المقتضية الأولية هي $x'z , x'y$.

وبالتالي، فإن : $f = x'z + x'y$.

(ب)

	zw	zw'	z'w'	z'w
xy	1	1		1
xy'	1			1
x'y'				
x'y	1	1		

شكل (٥ . ٨)

من الشكل (٥,٨) نجد أن الحدود المقتضية الأولية هي : y z , x w . وبالتالي فإن f = yz + x w .

ملاحظة

باستخدام مبدأ الثنوية والخوارزمية (٥,٢) نستطيع بسهولة أن نجد إحدى الخوارزميات التي تزودنا بطريقة لكتابة دالة بولية معطاة على شكل MPS .

خوارزمية (٥,٣)

لتكن f دالة بولية معطاة . من أجل كتابة f على شكل MPS نَفِّذ الخطوات التالية :

(١) اكتب f على شكل CSP .

(٢) جد متمِّم شكل كارنو (أي ضع 0 في كل خلية لاتقابل حداً أصغرياً من الحدود الأصغرية للدالة f) ،

(٣) جد أصغر عدد من المستطيلات الأعظمية التي تحتوي على جميع الخلاياالمحتوية على 0 .

(٤) جد الحدود المقتضية الأولية التي تقابل المستطيلات الأعظمية التي حصلت عليها في الخطوة (٣) .

(٥) أكتب مجموع الحدود المقتضية الأولية التي حصلت عليها في الخطوة (٤) . (إن هذا المجموع هو شكل MSP للدالة f') .

(٦) جد $f = (f')'$ مستخدماً نتيجة الخطوة (٥) .

ملاحظة

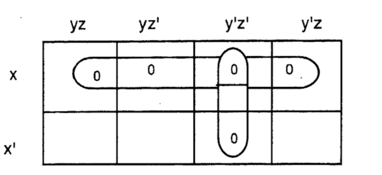
في حالة تعدد " أصغر عدد من المستطيلات الأعظمية التي تحتوي على جميع خلايا الدالة " فإننا نختار المستطيلات التي تعطينا العدد الأصغر من الأحرف .

مثال (٥,٢١)

اكتب f على شكل MPS حيث f معطاة كما في المثال (٥,٢٠) .

الحل

(أ)



شكل (٥.٩)

من الشكل (٥,٩) ، نجد أن الحدود المقتضية الأولية هي :

x ، $y'z'$. ومنه نجد أن : $f' = x + y'z'$ وبالتالي ، فإن :

$$f = (f')' = (x + y'z')' = x'(y + z)$$

(ب)

	zw	zw'	z'w'	z'w
xy			0	
xy'		0	0	
x'y'	0	0	0	0
x'y			0	0

شكل (٥.١٠)

من الشكل (١٠,٥) ، نجد أن الحدود المقتضية الأولية المطلوبة هي :

$$x'y' \, , \, z'w' \, , \, y'w' \, , \, x'z'$$

إذن، $f' = x'y' + z'w' + y'w' + x'z'$ هو شكل MSP للدالة f' . وبالتالي ، فإن :

$$f = (f')'$$
$$= (x'y' + z'w' + y'w' + x'z')'$$
$$= (x + y)(z + w)(y + w)(x + z)$$

هو شكل MPS للدالة f .

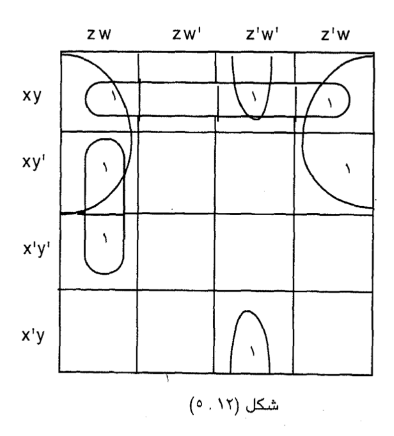
مثال (٥,٢٢)

أكتب f على شكل MSP وعلى شكل MPS حيث شكل كارنو للدالة f هو

	zw	zw'	z'w'	z'w
xy	1	1	1	1
xy'	1			1
x'y'	1			
x'y			1	

شكل (٥ . ١١)

الحل



شكل (١٢ . ٥)

من الشـــكل (٥,١٢) نجـــد أن الحـــدود المقتـضيـــة الأوليـــة المطلوبـــة هـــي :

xy , xw , $y'zw$, $yz'w'$. وبالتـالي فـإن : $f = xy + xw + y'zw + yz'w'$ هو

شكل MSP للدالة f . الآن ، نجد أن متممم شكل كارنو هو :

	zw	zw'	z'w'	z'w
xy				
xy'		0	0	
x'y'		0	0	0
x'y	0	0		0

شكل (١٣ . ٥)

وبالتالي ، فإن الحدود المقتضية الأولية المطلوبة للدالة f' هي :

$$y'w',\ x'yz,\ x'z'w$$

إذن، $f' = y'w' + x'yz + x'z'w$ هو شكل MSP للدالة f' . وبالتالي ، فإن

$$f = (f')' = (y+w)(x+y'+z')(x+z+w')$$

هو شكل MPS للدالة f .

تمارين (٥,٣)

في كل من التمارين التالية اكتب الدالة f على شكل MSP واكتب f على شكل MPS .

(١) $f=(x'+z)(xy+xz+yz)$

(٢) $f=(x'+y')xy'z$

(٣) $f=xy'zw'+xy'z'w+x'y'z'w'+x'yzw+x'yzw'$
$+x'yz'w+x'y'zw'+x'y'z'w$

(٤) $f=xy'+y'z+xz+xz'$

(٥) $f=xyw+xw'+xyz'+x'w+x'y'z'w'$

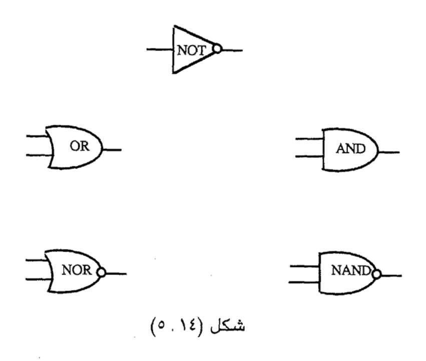
(٦) $f=(x'+y+w')(yz'w)'+(x'w)'$

(٥,٤) الدارات المنطقية
Logic Circuit

الدارة المنطقية هي دارة كهربائية لها " بوابات " بدلا من مفاتيح التشغيل والإيقاف . وهذه البوابات تتصرف مثل الدوال . في الحقيقة ، إن قيمة واحدة أو أكثر تدخل من البوابة وتخرج قيمة واحدة فقط من تلك البوابة . أيضا ، كل من الكميّات التي تدخل من البوابة لها حالتان ماديّتان ممكنتان (نفرض ، على سبيل المثال ، أن الحالتين هما : مستوى عالي الجهد ومستوى منخفض الجهد) ودائمًا تكون الكمية الخارجة من تلك البوابة في إحدى الحالتين المذكورتين . سوف نرمز للحالتين بالرمزين 1 و 0 .

هنـاك أنواع عديدة من البوابات المنطقية . في ما يلي سوف نستخدم

خمسة أنواع من هذه البوابات وهي بوابة النفي (NOT gate) ، بوابة الفصل (OR gate) ، بوابة العطف (AND gate) ، بوابة نفي الفصل (NOR gate) وبوابة نفي العطف (NAND gate) . وتمثل هذه البوابات كما في الشكل التالي :



شكل (١٤ . ٥)

في مايلي سوف نفرض أن التيار يتدفق من اليسار إلى اليمين. لذلك فإن الخطوط التي تقع على اليسار تمثل المداخل والتي تقع على اليمين تمثل المخارج. هناك مدخل واحد لبوابة النفي بينما يمكن زيادة عدد مداخل البوابات الأخرى ليصبح أكثر من مدخلين. الجدول (٥,٧) يبيّن القيم المُخْرجَة لكل من البوابات الخمس وذلك حسب القيم المُدْخَلة.

وبالنظر إلى الجدول (٥,٧) يكون من الواضح لدينا أننا نستطيع أن نعتبر القيم المدخلة لهذه البوابات متغيرات بولية والقيم المخرجة دوال بولية . تسمى بوابة

النفي بوابة معاكسة ، وغالبًا ما نرمز لها بدائرة صغيرة o بدلا من كما أننا لانعتبرها بوابة رئيسية وبالتالي ، فإننا نسمح بإدخال متمم كل متغير بولي مباشرة إلى أي من البوابات الأربع الأخرى .

من الجدير بالذكر أن القيمة المخرجة للدارة المنطقية هي دالة بولية وبالعكس إذا كان لدينا دالة بولية فإننا نستطيع أن نصمم دارة منطقية حيث تكون القيمة المخرجة لها هي الدالة البولية المعطاة .

جدول (٥,٧)

x	y	x NOT	x+ y OR	xy AND	$(x+y)'$ NOR	$(xy)'$ NAND
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1

مثال (٥,٢٣)

صمم دارة منطقية حيث تكون القيمة المخرجة لها هي الدالة البولية المعطاة .

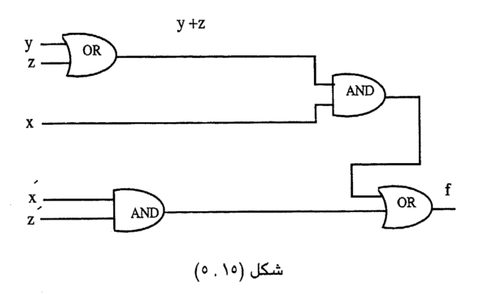
(أ) $f = x(y+z) + x'z'$

(ب) $g = (x+y)(x'y')$

(جـ) $h = xy'z + x'y'z'$.

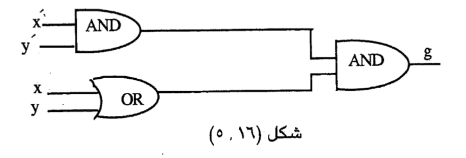
الحل

(أ) شكل (٥,١٥) يزودنا بدارة منطقية قيمتها المخرجة هي الدالة f .



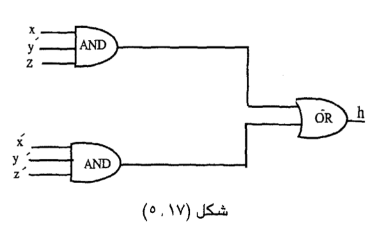
شكل (١٥ . ٥)

(ب) الشكل (٥,١٦) يزودنا بدارة منطقية قيمتها المخرجة هي الدالة g .



شكل (١٦ . ٥)

(جـ) الشكل (٥,١٧) يزودنا بدارة منطقية قيمتها المخرجة هي الدالة h .



شكل (١٧ . ٥)

مثال (٥,٢٤)

صمم دارة منطقية حيث تكـون قيمها المدخلة هي القيم التي تأخذها المتغيرات البوليـة x ، y ، z وقيمتها المخرجة هي 1 إذا وفقط إذا كان $x = y = z$.

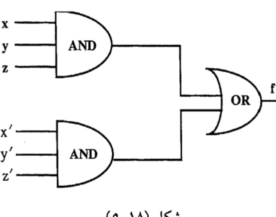
الحل

ننشىء جدول الصواب الذي يقابل الخاصة المعطاة فنحصل على الجدول التالي :

جدول (٥,٨)

x	y	z	f
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

إذن ، $f = x\,y\,z + x'\,y'\,z'$ ، وبالتـالي ، فـإن الدارة المنطقـيـة المبـيّنة في الشكل (٥,١٨) تحقق المطلوب .



شكل (٥,١٨)

لتكن f دالة بولية . من المعلوم أن هناك عبارات بولية كثيرة يمكن استخدامها للتعبير عن f . وبالتالي فإننا نستطيع تصميم دارات منطقية مختلفة حيث تكون القيمة المخرجة لكل منها هي f . وغالبا ما نعتبر عدد البوابات المنطقية الرئيسية المستخدمة في الدارة المنطقية معيارا للكفاءة .

تعريف (٥,١٦)

لتكن f دالة بولية . نقول عن دارة منطقية إنها دارة عطف وفصل أصغرية وقيمتها المخرجة هي f إذا كانت تحتوي على أصغر عدد ممكن من بوابات العطف والفصل وكانت قيمتها المخرجة هي f .

خوارزمية (٥,٤)

إذا كانت f دالة بولية معطاة فإن الخطوات التالية تؤدي إلى تصميم دارة عطف وفصل أصغرية وقيمتها المخرجة هي f .

(١) اكتب f على شكل MSP .

(٢) صمم دارة منطقية مستخدمًا بوابات العطف والفصل قيمتها المخرجة هي الدالة f في الخطوة (١)

(٣) اكتب f على شكل MPS .

(٤) صمم دارة منطقية مستخدمًا بوابات العطف والفصل قيمتها المخرجة هي الدالة f في الخطوة (٣) .

(٥) قارن الدارة المصممة في الخطوة (٢) مع الدارة المصممة في الخطوة (٤) واختر من بينهما الدارة التي تحتوي على العدد الأصغر من بوابات العطف والفصل .

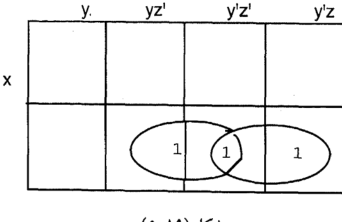
مثال (٥,٢٥)

صمم دارة عطف وفصل أصغرية قيمتها المخرجة هي الدالة f حيث

. $f = x'yz' + x'y'z' + x'y'z$

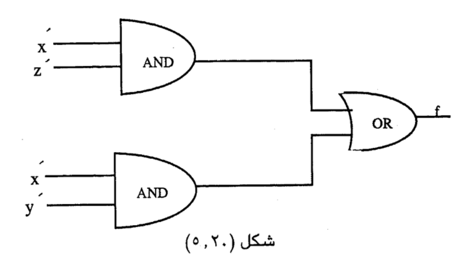
الحل

بما أن الدالة f مكتوبة على شكل CSP فإننا نكتب f على شكل MSP عن طريق استخدام شكل كارنو التالي :



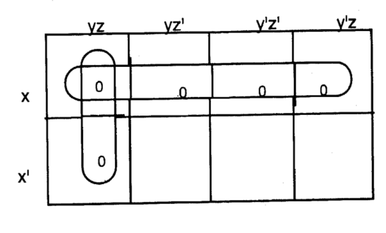
شكل (٥,١٩)

من الشكل (٥,١٩) نجد أن $f = x'z' + x'y'$. والشكل (٥,٢٠) يبين لنا الدارة المنطقيـة التي قيمتها المخرجة هي f .



شكل (٥,٢٠)

نستخدم الآن متمم شكل (٥,٢٠) لكتابة f' على شكل MSP ، وهذا المتمم هو :

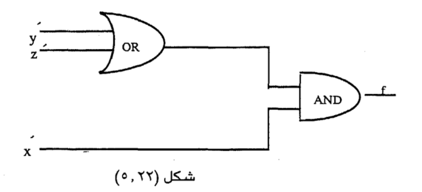


شكل (٥,٢١)

من الشكل (٥,٢١) ، نجد أن : $f' = x + yz$

وبالتالي، فإن $f = (f')' = x'(y' + z')$

الشكل (٥,٢٢) يزودنا بالدارة المنطقية التي قيمتها المخرجة هي f .



شكل (٥,٢٢)

وبمقارنة الشكلين (٥,٢٠) و (٥,٢٢) نجد أن الدارة المطلوبة هي الدارة المبيّنة في الشكل (٥,٢٢) .

سننهي هذا البند بإعطاء خوارزميتين . الأولى تصمم دارة منطقية تحتوي على بوابات نفي العطف فقط أما الثانية فتصمم دارة منطقية تحتوي على بوابات نفي الفصل فقط .

خوارزمية (٥,٥)

إذا كانت f دالة بولية فإن الخطوات التالية تنتج لنا دارة منطقية قيمتها المخرجة هي الدالة البولية f وتحتوي على بوابات نفي العطف فقط .

(١) ضع f على شكل مجموع جداءات (ليس ضرورياً أن تكون f على شكل مجموع جداءات تام CSP) .

(٢) ضع $f = f''$ مستخدما نتيجة الخطوة (١) .

(٣) أكتب f على شكل جداء ثم ضع $f = (f')'$.

(٤) صمم دارة منطقية قيمتها المخرجة هي $f = (f')'$ مستخدمًا بوابات نفي العطف ونتيجة الخطوة (٣) .

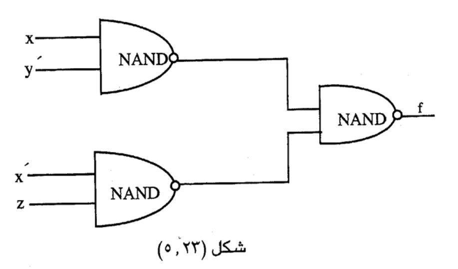
مثال (٥,٢٦)

صمم دارة قيمتها المخرجة هي الدالة البولية $f = xy' + x'z$ وتحتوي على بوابات نفي العطف فقط .

الحل

$$f = (f')' = [\,(xy')'\,(x'z)'\,]'$$

والدارة المطلوبة موضحة في الشكل (٥,٢٣).



شكل (٥,٢٣)

خوارزمية (٥,٦)

إذا كانت f دالة بولية فإن الخطوات التالية تنتج لنا دارة منطقية قيمتها المخرجة هي الدالة البولية f وتحتوي على بوابات نفي الفصل فقط .

(١) ضع f على شكل جداء مجاميع (ليس ضروريًا أن تكون f على شكل جداء مجاميع تام CPS) .

(٢) ضع $f = f''$ مستخدمًا نتيجة الخطوة (١) .

(٣) اكتب f على شكل مجموع ثم ضع $f = (f')'$.

(٤) صمم دارة منطقية قيمتها المخرجة هي $f = (f')'$ مستخدمًا بوابات نفي الفصل ونتيجة الخطوة (٣) .

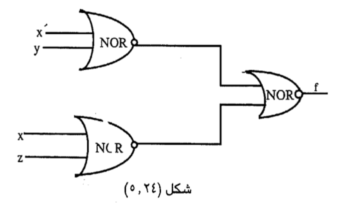
مثال (٥,٢٧)

صمم دارة منطقية قيمتها المخرجة هي الدالة البولية $f = (x' + y)(x+z)$ وتحتوي على بوابات نفي الفصل فقط .

الحل

$$f = (f')' = \left((x' + y)(x + z)\right)'' = \left((x' + y)' + (x+z)'\right)'$$

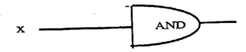
والدارة المطلوبة موضحة في الشكل (٥,٢٤)



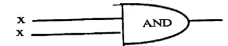
شكل (٥,٢٤)

ملاحظات

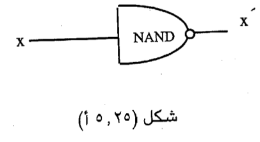
(١) إذا كانت G بوابة منطقية ذات مداخل متعددة وكانت القيم المدخلة في تلك المداخل متساوية فإننا نرسم مَدخَلاً واحداً لتلك البوابة . على سبيل المثال ، نستخدم الرمز



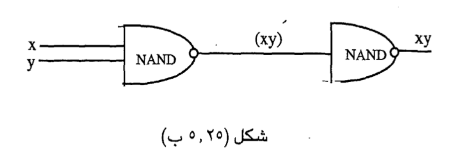
بدلا من الرمز



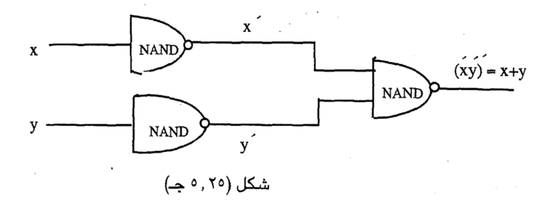
(٢) الدارات التالية تحتوي على بوابات نفي العطف فقط وتعمل عمل بوابات النفي، بوابات العطف وبوابات الفصل :



شكل (٥,٢٥ أ)

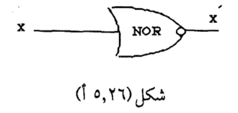


شكل (٢٥, ٥ ب)

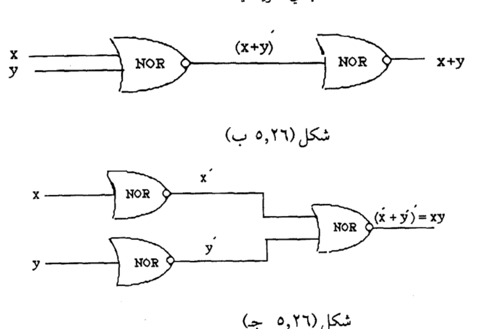


شكل (٢٥, ٥ جـ)

(٣) الدارات التالية تحتوي على بوابات نفي الفصل فقط وتعمل عمل بوابات النفي ، بوابات الفصل وبوابات العطف :



شكل (٢٦, ٥ أ)



شكل (٥,٢٦ ب)

شكل (٥,٢٦ جـ)

(٤) من الملاحظات السابقة ينتج أنه يمكن الحصول على الدارات التي تحتوي على بوابات نفي العطف فقط بوساطة التعويض المناسب في دارات العطف والفصل. هذه الملاحظة تنطبق أيضًا على الدارات التي تحتوي على بوابات نفي الفصل فقط. كذلك، إذا كانت f دالة بولية فإنه يمكن الحصول على دارة قيمتها المخرجة هي f وتحتوي على بوابات من نوع معيّن عن طريق إنشاء دارة قيمتها المخرجة هي f' ثم إضافة بوابة مناسبة إلى هذه الدارة. المثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٥,٢٨)

صمم دارة منطقية قيمتها المخرجة هي الدالة $f = xy' + x'z$ وتحتوي على بوابات نفي الفصل فقط.

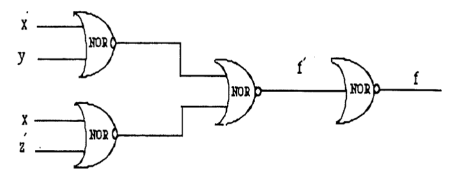
الحل

$$f' = (x y' + x' z)' = (x' + y)(x + z')$$

الآن

$$f = (f')'' = \left((x' + y)(x + z')\right)'' = \left((x' + y)' + (x + z')'\right)'$$

الدارة التالية تحقق المطلوب :



شكل (٥,٢٧)

تمارين (٥,٤)

في كل من التمارين من ١ إلى ٥ صمم دارة منطقية قيمتها المخرجة هي الدالة المعطاة حيث :

(أ) الدارة دارة عطف وفصل أصغرية .

(ب) الدارة تستخدم بوابات نفي العطف فقط .

(جـ) الدارة تستخدم بوابات نفي الفصل فقط .

(١) $f = \left(xy + (x'y' + x)\right)x$

(٢) $f = (x + y')z + xz' + (x' + z)z'$

(٣) $f = \big((x+y)(xy)' + z\big)\big((x+y)(xy)'z\big)'$

(٤) $f = xyzw + xyzw' + x'yzw + x'yzw'$

(٥) $f = xyzw + \big((z+w)(y+z+w')(x+z+w')\big)'$

(٦) صمم دارة منطقية حيث تكون قيمها المدخلة هي القيم التي تأخذها المتغيرات البولية x ، y ، z وقيمتها المخرجة هي 1 إذا وفقط إذا كان $x=y$ و $x \neq z$.

(٧) صمم دارة منطقية حيث تكون قيمها المدخلة هي القيم التي تأخذها المتغيرات البولية x ، y ، z وقيمتها المخرجة هي 1 إذا وفقط إذا كان $x = y$.

الفصل السادس

مدخل إلى نظرية الرسومات

AN INTRODUCTION TO GRAPH THEORY

(٦,١) مفاهيم أساسية وأمثلة
Basic Concepts and Examples

تعود البدايات المعروفة لنظرية الرسومات إلى عالم الرياضيات السويسري ليونارد أويلر (Leonard Euler). في العام ١٧٣٦م قام أويلر بنشر حلّ لمسألة الجسور السبعة (سنأتي على ذكرها لاحقا)، وفي القرن التاسع عشر الميلادي نشرت عدة نتائج مهمة في نظرية الرسومات. ثم قام كُونِج (Konig) في العام ١٩٣٦م بتأليف أول كتاب حول نظرية الرسومات.

إن من أهم الأسباب الباعثة على الاهتمام بنظرية الرسومات هو قابليتها للتطبيق في ميادين متنوعة. في الحقيقة، إذا كانت لدينا مجموعة متقطعة من العناصر وكان بعض أزواجها مرتبطا بطريقة ما فإن الرسم يزودنا بنموذج رياضي لتلك المجموعة. ومن الممكن أن تكون هذه العناصر أناسًا مرتبطين بعلاقات عائلية أو ذرات جزيء عضوي مرتبطة كيميائيًا، وهلم جرا.

في البداية، ظهرت نظرية الرسومات كأداة لحل بعض الألغاز والألعاب ولكن تطبيقاتها اليوم تشمل مجالات واسعة مثل علم الحاسوب، بحوث العمليات، الاقتصاد، الكيمياء، الهندسة الكهربائية وعلم اللغة.

تعريف (٦,١)

لتكن V مجموعة غير خالية ولتكن E مجموعة منفصلة عن V. ليكن $f: E \longrightarrow \{ \{x, y\}: x, y \in V \}$ تطبيقًا. نسمي الثلاثي المرتّب $G = (V, E, f)$ رسمًا. نسمي V مجموعة رؤوس G ونسمي E مجموعة أضلاع G. نقول إن (V, E, f) رسم منته إذا كانت كل من V و E مجموعة منتهية.

في ما يلي سنفرض أن الرسوم التي نتكلم عنها رسوم منتهية من غير أن نذكر ذلك صراحة. إذا كان $v \in f(e)$ فإننا نسمي v طرفا للضلع e كما نقول إن e ساقط على v وإن v ساقط على e. إذا كان $a, b \in V$ فإننا نقول إن a مجاور للرأس b إذا كان يوجد $e \in E$ حيث $f(e)=\{a,b\}$. كذلك، نقول إن $a \in V$ مجاور لنفسه إذا كان يوجد $e \in E$ حيث $f(e)=\{a\}$. إذا كان $e_1, e_2 \in E$ فإننا نقول إن e_1 مجاور للضلع e_2 إذا كان يوجد طرف مشترك $a \in V$ للضلعين e_1 و e_2. إذا كان $f(e)=\{a\}$ فإننا نسمي e عروة عند a. إذا كان $f(e_1) = f(e_2) = \{a,b\}$ حيث $a \neq b$ فإننا نقول إن كلاً من e_1 و e_2 ضلع متكرر، وإذا كان $f(e_1) = f(e_2) = \{a\}$ فإننا نقول إن كلا من e_1 , e_2 عروة مكررة عند a. نقول إن $G = (V, E, f)$ رسم بسيط إذا كان G لايحتوي على أضلاع مكررة ولايحتوي على عروات. إذا كان $G = (V, E, f)$ رسماً فإننا سوف نطابق كل ضلع مع صورته بوساطة f ولانفرّق بينهما، أي أنه إذا كان $f(e) = \{a,b\}$ فإننا نكتب مباشرة $e = \{a,b\}$ وبالتالي فإننا نتجاهل الدالة f ونكتب $G = (V, E)$ بدلا من $G = (V, E, f)$.

إذا كان $G = (V , E , f)$ رسمًا وكان $x \in V$ فإننانعرف درجة x على أنها عدد المرات التي تلتقي فيها أضلاع G مع x. وهذا العدد مختلف عن عدد المرات التي تسقط فيها أضلاع G على x لأن العروة تلتقي مع الرأس مرتين. نرمز لدرجة x بالرمز deg x ونلاحظ أن :

$$\deg x = \left| \left\{ e : x \in f(e) , \{x\} \neq f(e) \right\} \right| + 2 \left| \left\{ e : f(e) = \{x\} \right\} \right|$$

إذا كان $\deg x = 0$ فإننا نسمي x رأسًا منعزلا .

العرض السابق لمفهوم الرسم هوعرض مجرد، ومن أجل وصف ملموس لهذا المفهوم نقوم عادة بتمثيل الرسم على النحو التالي : نُمثِّل كل رأس بنقطة أو بدائرة صغيرة وإذا كان $f(e) = \{x,y\}$ فإننا نمثل e بقطعة من خط (ليس بالضرورة مستقيمًا) تصل بين x وy. في مايلي سوف نطابق الرسم مع تمثيله ولانفرق بينهما كما نسمي E المجموعة المتضاعفة في حالة الرسم غير البسيط وذلك بسبب تكرار بعض عناصرها .

مثال (٦,١)

ليكن $G = (V , E , f)$ رسمًا معرفًا كما يلي : $V = \{ a , b , c , d , g \}$، $E = \{e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6\}$ والدالة f معرفة بوساطة الجدول (٦,١) .

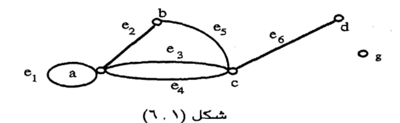
جدول (٦,١)

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
f (e)	{a}	{a,b}	{a,c}	{a,c}	{b,c}	{c,d}

(أ) جد تمثيلاً للرسم G، (ب) جد درجات رؤوس G والرؤوس المنعزلة،
(جـ) جد الأضلاع المتكررة والعروات و (د) هل G رسم بسيط ؟ لماذا ؟

الحل

(أ)



شكل (٦.١)

(ب) نبيِّن درجات الرؤوس بوساطة الجدول (٦,٢)

جدول (٦,٢)

x	a	b	c	d	g
deg x	5	2	4	1	0

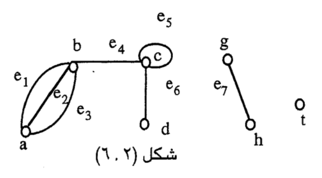
بما أن $\deg g = 0$ فـإن g رأس منعـزل (وهو الرأس المنعـزل الوحـيـد في هذا الرسم).

(جـ) بما أن $f(e_3) = f(e_4) = \{a,c\}$ فإن كلا من e_3 و e_4 ضلع متكرر تكراره 2، وبما أن $f(e_1) = \{a\}$ فإن e_1 عروة.

(د) G ليس رسمًا بسيطًا لأنه يحتوي على أضلاع متكررة (أو لأنه يحتـوي على عـروة).

مثال (٦,٢)

إذا كـان $G = (V, E, f)$ هـو الرسـم المعطى في الشكل (٦,٢)، فـجـد كلاً من f, E, V.



شكل (٦.٢)

الحل

واضح أن $V = \{a, b, c, d, g, h, t\}$. كذلك، إن $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ والجدول (٦,٣) يعطينا الدالة f :

جدول (٦,٣)

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
f (e)	{a,b}	{a,b}	{a,b}	{b,c}	{c}	{c,d}	{g,h}

هناك علاقة بسيطة ولكنها مهمة جداً بين عدد أضلاع الرسم ودرجات رؤوسه. المبرهنة التالية تصف لنا هذه العلاقة وتعرف بتمهيدية تصافح الأيدي.

مبرهنة (٦,١)

إذا كان $G = (V, E, f)$ *رسمًا حيث* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *فإن*

$$deg\, v_1 + deg\, v_2 + \ldots + deg\, v_n = 2\,|E|$$

البرهان

نحسب عدد المرات التي تلتقي فيها أضلاع G مع رؤوس G بطريقتين مختلفتين. كل ضلع يلتقي بالرؤوس مرتين وبالتالي فإن العدد المطلوب هو $2|E|$.

ومن ناحية أخرى كل رأس x يلتقي مع الأضلاع deg x مرة وبالتالي، فإن العدد المطلوب هو $\deg v_1 + \deg v_2 + \ldots + \deg v_n$. إذن، مما سبق نجد أن:

$$\deg v_1 + \deg v_2 + \ldots + \deg v_n = 2|E| \quad . \quad \Delta$$

تعريف (٦,٢)

نقول إن x رأس فردي إذا كان deg x عددًا فرديًا، كما نقول إن x رأس زوجي إذا كان deg x عددًا زوجيًا.

مبرهنة (٦,٢)

إذا كان $G = (V, E, f)$ رسمًا فإن عدد الرؤوس الفردية في G هو عدد زوجي.

البرهان

لتكن $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. ولتكن V_1 هي مجموعة الرؤوس الفردية في G. ولتكن V_2 هي مجموعة الرؤوس الزوجية في G. إذن $V = V_1 \cup V_2$ و $V_1 \cap V_2 = \phi$.

بما أن $\sum_{x \in V} \deg x = 2|E|$ فإن $\sum_{x \in V_1} \deg x + \sum_{x \in V_2} \deg x = 2|E|$. واضح

أن $\sum_{x \in V_2} \deg x$ عدد زوجي، كذلك، إن $2|E|$ عدد زوجي. إذن، $\sum_{x \in V_1} \deg x$

عدد زوجي وبالتالي، فإن $|V_1|$ عدد زوجي. Δ

مثال (٦,٣)

هل يوجد رسم درجات رؤوسه هي الأعداد 3 , 4 , 2 , 5 , 3 ؟

الحل

بما أن 17 = 3 + 4 + 2 + 5 + 3 عـدد فردي فـإنه لايوجـد رسم يحقق المطلوب (أو: 3 , 5 , 3 هي الدرجـات الفـردية المعطاة في المسـألة . بما أن عـدد هذه الدرجـات فردي فإنه لايوجد رسم يحقق المطلوب) .

تمارين (٦,١)

(١) ليكن G = (V , E , f) رسمًا معرفًا كما يلي :

$V = \{a, b, c\}$ ، $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ،

جدول (٦,٤)

e	e_1	e_2	e_3	e_4
f (e)	{a,b}	{a,b}	{a,b}	{b,c}

(أ) جد تمثيلا للرسم G . (ب) جد درجات رؤوس G .

(جـ) جد الأضلاع المتكررة والعروات

(د) هل G رسم بسيط ؟ لماذا ؟

(٢) ليكن G = (V , E , f) رسمًا معرفًا كما يلي :

$V = \{a, b, c, d, g\}$ ، $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

جدول (٦,٥)

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
f (e)	{b}	{c,d}	{c,d}	{b,c}	{a,b}

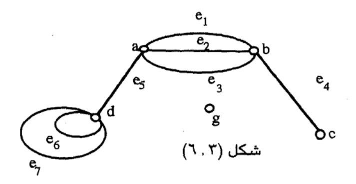
(أ) جد تمثيلا للرسم G .

(ب) جد درجات رؤوس G والرؤوس المنعزلة .

(جـ) جد الأضلاع المتكررة والعروات .

(د) هل G رسم بسيط ؟ لماذا ؟

(٣) جد f , E , V حيث G = (V , E , f) قد تم تمثيله بالشكل (٦,٣) .



شكل (٣ . ٦)

(٤) هل يوجد رسم حيث جميع درجات رؤوسه هي :

(أ) 5 , 5 , 3 , 2 , 2 ,1 (ب) 3 , 3 , 3 , 3

(٥) أعط مثالا على رسم بسيط حيث :

(أ) جميع الرؤوس زوجية (ب) جميع الرؤس فردية .

(٦) أثبت أن عدد الأشخاص الذين صافحوا عدداً فردياً من الأشخاص في حفلة ما يجب أن يكون زوجياً .

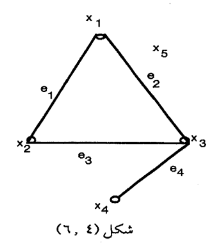
(٧) ليكن G = (V , E) رسماً حيث مجموع درجات رؤوسة هو 48 . جد عدد أضلاعه .

(٨) جد رسماً بسيطاً عدد رؤوسه 10 حيث تكون 6 من هذه الرؤوس زوجية والرؤوس الأخرى فردية .

(٩) ليكـــن $G = (V, E)$ رســـما بســـيطا حيـــث $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. نعرف مصفوفة الوقوع للرسم G بأنــها المصفوفة $B = [b_{ij}]$ من النوع $n \times m$ حيث :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \text{ واقع على } e_j \\ 0, & x_i \text{ غير واقع على } e_j \end{cases}$$

(أ) جد مصفوفة الوقوع للرسم المعطى في الشكل (٦,٤)



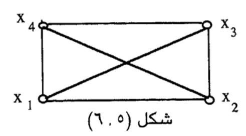
شكل (٤ , ٦)

(ب) إذا كانت $B = [b_{ij}]$ مصفوفة الوقوع للرسم $G = (V, E)$ حيث يحتوي الصف i على عدد j من الأعداد 1 فأثبت أن $\deg(x_i) = j$.

(١٠) ليكن $G = (V, E)$ رسـمًا بسيطًا حيث $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. نعـرف مصفوفـة الجوار للرســم G بأنها المصفوفة $A = [a_{ij}]$ من النوع $n \times n$ حيث :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{x_i, x_j\} \in E \\ 0, & \{x_i, x_j\} \notin E \end{cases}.$$

(أ) جد مصفوفة الجوار للرسم المعطي في الشكل (٦,٥)



شكل (٦ . ٥)

(ب) أثبت أن القطر الرئيسي لمصفوفة جوار أي رسم بسيط يتكون من أصفار.

(جـ) إذا كانت A هي مصفوفة الجوار لرسم بسيط فأثبت أن A متناظرة (أي أن $A = A^t$).

(١١) ليكن $G = (V, E)$ رسما بسيطا و العلاقة R معرفة على V كالتالي :
xRy إذا وفقط إذا كان $\{x, y\} \in E$. أثبت أن العلاقة R غير انعكاسية وتناظرية.

(١٢) (أ) إذا كان $G = (V, E)$ رسما بسيطا حيث $|V| = n$ فأثبت أن $|E| \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

(ب) هل يوجد رسم بسيط حيث يحتوي على 10 رؤوس و 50 ضلعًا ؟

(١٣) أثبت أنه لا يوجد رسم بسيط حيث جميع درجات رؤوسه هي : 5 , 2 , 1 , 1 , 1.

(١٤) أثبت أنه إذا كان $G = (V, E)$ رسما بسيطا حيث $|V| \geq 2$. فإنه يوجد $x, y \in V$ ، $x \neq y$ و $\deg(x) = \deg(y)$.

[إرشاد : استخدم مبدأ برج الحمام].

(٦,٢) الممرات والدورات
Paths and Cycles

من الآن فصاعداً سنطابق كل ضلع مع صورته بوساطة الدالة f وبدلا من استخدام الرمز $G = (V, E, f)$ فإننا سنستخدم الرمز $G = (V,E)$.

تعريف (٦,٣)

ليكن $G = (V,E)$ رسمًا وليكن $a, b \in V$. ليكن $n \geq 1$ عددًا صحيحًا.

(أ) إذا كانت $v_1, e_1, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_n$ متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع حيث $v_1 = a, v_n = b$ و $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ لكل i فإننا نسميها مسارًا من a إلى b.

(ب) إذا كانت $v_1, e_1, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_n$ متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع حيث $v_1 = v_n = a$ و $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ لكل i فإننا نسميها مسارًا مغلقًا من a إلى a.

(جـ) إذا كان $v_1, e_1, v_2 \ldots, e_{n-1}, v_n$ مسارًا من a إلى b فإننا نسميه طريقًا إذا كان $e_i \neq e_j$ لكل $i \neq j$.

(د) إذا كان $v_1, e_1, v_2 \ldots, e_{n-1}, v_n$ طريقًا مغلقًا من a إلى a فإننا نسميه دارة.

(هـ) إذا كان $v_1, e_1, \ldots, e_{n-1}, v_n$ مسارًا من a إلى b فإننا نسميه ممرًا إذا كان $v_i \neq v_j$ لكل $i \neq j$.

(و) إذا كان $v_1, e_1, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_n$ ممرًا مغلقًا من a إلى a حيث $n > 3$ فإننا نسميه دورة. كما نسمي الممر المغلق a, e_1, v_2, e_2, a دورة إذا كان $e_1 \neq e_2$.

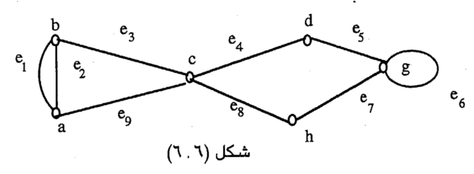
تعريف (٦,٤)

إذا كان $v_1\ , e_1 , v_2\ , \ldots , e_n\ , v_{n+1}$ مساراً من a إلى b فإننا نرمز لهذا المسار بالرمز $a\, e_1 e_2\ \ldots\ e_n b$، وإذا كان مساراً مغلقاً من a إلى a فإننا نرمز له بالرمز $a\, e_1\ e_2\ \ldots\ e_n\ a$. إذا كان w مساراً مفتوحاً (أو مغلقاً) فإننا نعرف طول w بانه عدد الأضلاع التي يحتويها ونرمز له بالرمز $L\ (w)$.

نقول إن المسار w فردي إذا كان $L\ (w)$ فردياً، ونقول إنه زوجي إذا كان $L\ (w)$ زوجياً.

مثال (٦,٤)

ليكن G هو الرسم المعطى في الشكل (٦,٦)



شكل (٦.٦)

نلاحظ أن :

(أ) $a\, e_2\ e_3 e_4 e_4\ e_3 b$ مسار من a إلى b طوله 5.

(ب) $a\, e_2 e_3 e_4 e_5 e_7 e_8 e_9\, a$ دارة فردية طولها 7 وليست دورة.

(جـ) $c\ e_4\ e_5 e_7 e_8 c$ دورة زوجية طولها 4.

مبرهنة (٦,٣)

(أ) *إذا كان $v_1, e_1, v_2, \dots, e_{n-1}, v_n$ ممرًا من a إلى b فإنه طريق من a إلى b.*

(ب) *إذا كانت $v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$ دورة من a إلى a فإنها دارة من a إلى a.*

البرهان

(أ) نبرهن المكافىء العكسي. نفرض أن $v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$ ليس طريقًا. إذن يوجد i و j حيث $i \neq j$ و $e_i = e_j$. إذن، إن طرفاً للضلع e_i يتكرر في المتتالية وبالتالي فإنها ليست ممراً.

(ب) نبرهن المكافىء العكسي. نفرض أن $v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$ ليست دارة. إذن يوجد $j \neq i$ حيث $e_i = e_j$. إذا كان $n = 3$ فإن v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 ليست دورة لأن $e_1 = e_2$. الآن، نفرض أن $n > 3$ وأن $j > i$. إذا كان e_i عروة فواضح أن المتتالية ليست دورة. نفرض أن e_i ليس عروة. إذن يوجد طرف للضلع e_i مختلف عن v_1 ويوجد طرف للضلع e_j مختلف عن v_n، وبالتالي، فإن طرفًا مختلفًا عن $v_1 = v_n$ للضلع $e_i = e_j$ يتكرر في المتتالية. إذن، المتتالية ليست دورة. Δ

من المثال (٦,٤)، نلاحظ أنه إذا كانت w دارة فإنها ليست بالضرورة دورة، وبالمثل إذا كانت w طريقا فإنها ليست بالضرورة ممراً.

مبرهنة (٦,٤)

(أ) *إذا وجد مسار من a إلى b فإنه يوجد ممر من a إلى b.*

(ب) *إذا وجدت دارة من a إلى a فإنه توجد دورة من a إلى a.*

البرهان

(أ) نفرض أن { يوجد مسار طوله n من a إلى b : n } = A . إذن $A \neq \phi$. بالاستناد إلى مبدأ الترتيب الحسن، نجد أنه يوجد عدد أصغري m في A . ليكن $v_1 , e_1, v_2, \ldots , e_m ,v_{m+1}$ مساراً طوله m من a إلى b. إذا كان يوجد $j > i$ حيث $v_i = v_j$ فإن $v_1 , e_1 , \ldots , v_i , e_{j+1} , \ldots , e_m, v_{m+1}$ مسار من a إلى b وطوله أصغر من m . إن هذا يناقض تعريف m وبالتالي، فإن $v_1 , e_1, v_2 , \ldots , e_m, v_{m+1}$ ممر من a إلى b .

(ب) البرهان مشابه لبرهان الفقرة (أ) وبالتالي، فإننا نتركه كتمرين للقارىء. Δ

مثال (٦,٥)

نعتبر الرسم المعطى في المثال (٦,٤). لقد لاحظنا في ذلك المثال أن $a , e_2, b , e_3 , c , e_4, d , e_5, g , e_7, h , e_8, c, e_9,a$ دارة من a إلى a . إذا حذفنا المسار من c إلى c فإننا نحصل على الدورة $a , e_2 , b , e_3 , c , e_9 , a$.

مبرهنة (٦,٥)

ليكن $G = (V , E)$ رسمًا . إذا كان يوجد $a , b \in V$ ، $a \neq b$ ، حيث يوجد ممران مختلفان من a إلى b فإن G يحتوي على دورة .

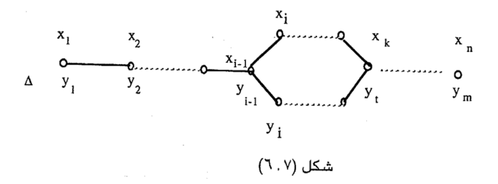
البرهان

من الواضح أنه إذا كان G يحتوي على عروة أو على ضلع متكرر فإن G يحتوي على دورة. الآن، نفرض أن G رسم بسيط . ونفرض أن $x_1 , e_1 , x_2 , \ldots , e_{n-1} , x_n$ و $y_1 , c_1, y_2 , \ldots, c_{m-1}, y_m$ ممران مختلفان من a إلى b. بما أن الممرين مختلفان فإنه يوجد i حيث $x_1 = y_1 , \ldots, x_{i-1} = y_{i-1}$ ولكن

$x_i \neq y_i$. ضع { يوجد $i < j \le m$ حيث $x_r = y_j$ و $i < r \le n$: $A = \{r$. بما أن $x_n = y_m$ فإن $n \in A$ وبالتالي فإن $A \neq \phi$. بالاستناد إلى مبدأ الترتيب الحسن يوجد عدد أصغري k في A. إذن يوجد $i < t \le m$ حيث $x_k = y_t$ الآن نعتبر المسار المغلق :

$$y_{i-1} = x_{i-1}\ ,\ e_{i-1}\ ,\ x_i\ ,\ e_i\ ,\ \ldots\ ,\ e_{k-1}\ ,\ x_k = y_t\ ,\ c_{t-1}\ ,\ y_{t-1}\ ,\ \ldots\ ,\ c_{i-1}\ ,\ y_{i-1} = x_{i-1}.$$

إن هذا المسار المغلق يبدأ من x_{i-1} ثم يتبع الممر الأول لغاية x_k ثم يعود متبعا الممر الثاني لغاية y_{i-1}. بما أن $x_i \neq y_i$ فإن طول هذا الممر المغلق أكبر من أو يساوي 3. من تعريف الممر ينتج أن $x_k , \ldots , x_{i-1}$ رؤوس مختلفة وأن $y_t , \ldots , y_{i-1}$ رؤوس مختلفة، وبالاستناد إلى تعريف k ينتج أن $x_r \neq y_s$ لكل $i-1 \le r \le k$, $i-1 < s < t$. إذن، إن المسار المغلق المُنشأ هو في الواقع دورة من x_{i-1} إلى x_{i-1}. (الشكل (٦,٧) يسهل متابعة البرهان).



شكل (٦.٧)

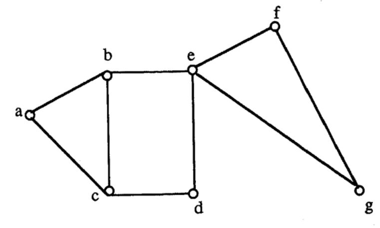
ملاحظة

ليكن $G = (V , E)$ رسمًا حيث G لا يحتوي على دورات وليكن $a , b \in V$، $a \neq b$. بالاستناد إلى المكافىء العكسي للمبرهنة (٦,٥) نجد أنه يوجد على الأكثر ممر واحد من a إلى b.

تمارين (٦,٢)

(١) أثبت أنه إذا كانت C دورة فإن C دارة .

(٢) ليكن لدينا الرسم المعطى بالشكل (٦,٨) :



شكل (٦ , ٨)

(أ) جد ممراً من b إلى d .

(ب) جد طريقًا من b إلى d .

(جـ) جد دارة من b إلى b .

(د) جد دورة من b إلى b .

(هـ) جد جميع الممرات من b إلى f.

(٣) ليكن $G = (V, E)$ رسما بسيطا ولتكن R علاقة على V معرفة كالتالي :
xRy إذا وفقط إذا كان $x = y$ أو يوجد ممر من x إلى y .

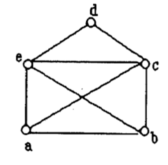
(أ) أثبت أن R علاقة تكافؤ .

(ب) جد فصول التكافؤ للعلاقة R .

(٤) ليكن $G = (V, E)$ رسمًا بسيطًا ولتكن A هي مصفوفة الجوار للرسم G .

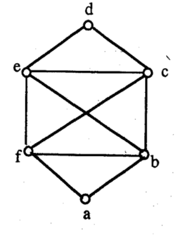
أثبت أن a_{ij} في المصفوفة A^n هو عدد المسارات ذات الطول n من الرأس i إلى الرأس j [إرشاد : استخدم الاستقراء الرياضي على n].

(٥) استخدم تمرين (٤) لإيجاد عدد المسارات ذات الطول 4 للرسم المعطى بالشكل (٦,٩).



شكل (٦,٩)

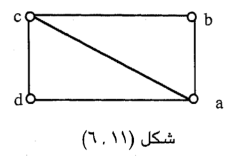
(٦) ليكن لدينا الرسم المعطى بالشكل (٦,١٠)



شكل (٦,١٠)

جد دارة تحتوي على جميع أضلاع الرسم.

(٧) ليكن لدينا الرسم المعطى بالشكل (٦,١١).



شكل (٦.١١)

جد دورة تحتوي على جميع رؤوس الرسم.

هل تستطيع إيجاد دارة تحتوي على جميع أضلاع الرسم ؟

(٨) إذا كان $G = (V, E)$ دورة حيث $|V| = n$، فكم عدد أضلاع G ؟

(٦,٣) الرسوم الجزئية والرسوم المترابطة
Subgraphs and Connected Graphs

ليكن $G = (V,E)$ رسمًا وليكن $a \in V$ ، $e \in E$ ، $\phi \neq W \subseteq V$ ، $M \subseteq E$.

(أ) إذا كان $H = (V', E')$ رسمًا فإننا نقول إن H رسم جزئي من G إذا كانت $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$.

(ب) نقول إن $H = (V', E')$ رسم جزئي مُولِّد للرسم G إذا كان H رسمًا جزئيًا من G وكانت $V' = V$.

(جـ) الرسم الرديف للرسم G هو رسم جزئي مُولِّد للرسم G ونحصل عليه من G باجراء مايلي : (١) نحذف جميع العروات الموجودة في G ، (٢) لكل $x, y \in V$ حيث $x \neq y$ نحذف جميع الأضلاع التي تصل بين x , y إلاّ واحدًا.

واضح أن الرسم الرديف هو رسم بسيط.

(د) نقــول إن $H = (W , F)$ هو الرسم الجزئي المُحْدثَ بوساطة W في G إذا كانت $F = \{ e : e \in E$ ، e يصل بين عنصرين من $W \}$.

(هـ) نقول إن $H = (U , M)$ هو الرسم الجزئي المحـدَثُ بوساطة M في G إذا كـانت $U = \{ v : v \in V$ ، v طرف لعنصر ينتمي إلى $M \}$.

(و) نرمز بالرمز $G - a$ للرسم الجزئي الذي نحصل عليه من G بإجراء مايلي :

(١) نحذف a من مجموعة الرؤوس V ،

(٢) نحذف من مجموعة الأضلاع E كل ضلع ساقط على a .

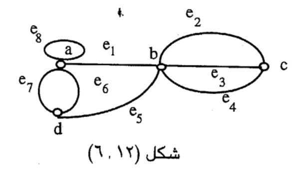
بالمثـــل، نعـــرف $G - \{ a_1 , \dots , a_m \}$ حيـث $\{a_1 , \dots , a_m\}$ مجموعة رؤوس.

(ز) نرمز بالرمز $G - e$ للرسم الجزئي الذي نحصل عليه من G بعد حذف الضلع e .

بالمثل، نعرف $G - \{e_1 , \dots , e_r\}$ حيث $\{e_1 , \dots , e_r\}$ مجموعة أضلاع .

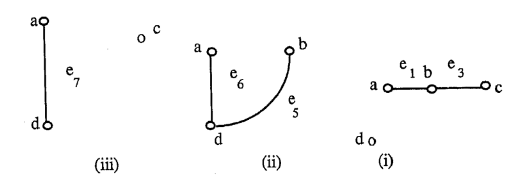
مثال (٦,٦)

ليكن G هو الرسم المعطى بالشكل (٦,١٢)



شكل (٦,١٢)

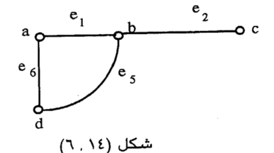
(أ) كل رسم من الرسوم التالية رسم جزئي من G :



شكل (٦،١٣)

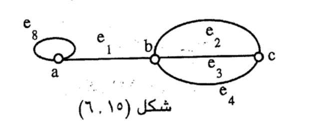
(ب) الرسم الجزئي المعطى في (i) من الفقرة (أ) رسم جزئي مولد للرسم G .

(جـ) الرسم الجزئي التالي هو الرسم البسيط الرديف للرسم G :



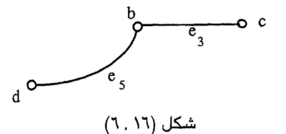
شكل (٦،١٤)

(د) الرسم الجزئي المحدث بوساطة { a , b , c } هو :



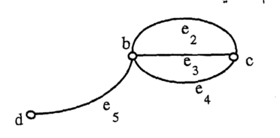
شكل (٦،١٥)

(هـ) الرسم الجزئي المحدث بوساطة $\{e_3 , e_5\}$ هو :



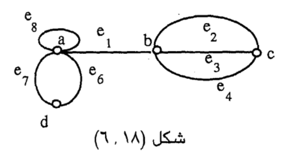
شكل (٦ . ١٦)

(و) الرسم الجزئي G - a هو :



شكل (٦ . ١٧)

(ز) الرسم الجزئي $G - e_5$ هو :



شكل (٦ . ١٨)

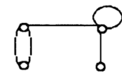
تعريف (٦,٥)

ليكن $G = (V , E)$ رسمًا وليكن $a , b \in V$ حيث $a \neq b$. نقول إن a مرتبط بالرأس b إذا كان يوجد ممر من a إلى b . كذلك نعتبر المتتالية a دورة طولها صفر

وبالتالي فإننا نقول إن a مرتبط بنفسه . نقول إن G رسم مترابط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان $x , y \in V$ فإن x مرتبط بالرأس y . كذلك نقول إن G رسم غير مترابط إذا كان يوجد $u \in V$, v حيث u غير مرتبط بالرأس v .

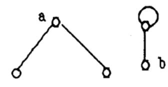
مثال (٦,٧)

(أ) الرسم المعطى بالشكل (٦,١٩) رسم مترابط :



(شكل ٦,١٩)

(ب) الرسم المعطى بالشكل (٦,٢٠) رسم غير مترابط



(شكل ٦,٢٠)

لاحظ أن a غير مرتبط بالرأس b .

مبرهنة (٦,٦)

ليكن $G = (V , E)$ رسمًا . نعرف علاقة T على المجموعة V كما يلي :

لكل $x , y \in V$، $x\,T\,y$ إذا وفقط إذا كان x مرتبطًا بالرأس y. عندئذ، إن T علاقة تكافؤ على V.

البرهان

بما أن كل رأس مرتبط بنفسه فإن T انعكاسية . إذا كان $x_1 , e_1 , \ldots , e_{n-1} , x_n$ ممراً من a إلى b فإن $x_n , e_{n-1} , \ldots , e_1 , x_1$ ممر من b إلى a وبالتالي فإن T تناظرية . إذا كان $x_1 , e_1 , \ldots, e_{n-1} , x_n$ ممرًا من x إلى y وكان $y_1 , c_1 , \ldots , c_{n-1} , y_m$ ممرًا من y إلى z فإن $x_1 , e_1 , e_{n-1} , x_n = y_1 , c_1 , \ldots, c_{n-1} , y_m$ مسار من x إلى z و بالتالي فإنه يوجد ممر من x إلى z . إذن T متعدية ، وبالتالي ، فإن T علاقة تكافؤ على V . Δ

تعريف (٦,٦)

نعتبر العلاقة T المذكورة في المبرهنة (٦,٦) . نفرض أن $V_1 , \ldots , V_m$ هي فصول التكافؤ . لكل $1 \le i \le m$ نرمز بالرمز C_i للرسم الجزئي المحدث بوساطة V_i . يسمى C_i مركبة مترابطة (أو مركبة) للرسم G .

يستطيع القارىء أن يرى بسهولة أن كل مركبة C_i تحقق مايلي :

(١) C_i رسم مترابط ،

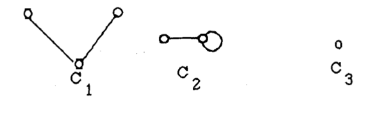
(٢) إذا كان H رسمًا جزئيًا مترابطًا من G وكان C_i رسمًا جزئيًا من H فإن $H = C_i$ (أي رؤوس H هي رؤوس C_i وأضلاع H هي أضلاع C_i)

مثال (٦,٨)

ليكن G هو الرسم المعطى بالشكل (٦,٢١) .

(شكل ٦,٢١)

عندئذ، مركبات G هي :



(شكل ٦,٢٢)

مبرهنة (٦,٧)

لكل عدد صحيح $n \geq 1$ فإن كل رسم مترابط عدد رؤوسه n يجب أن يكون عدد أضلاعه أكبر من أو يساوي $n-1$.

البرهان.

نستخدم الاستقراء الرياضي على n. إذا كان $n = 1$ فإن $n-1 = 1-1 = 0$ واضح أن عدد الأضلاع أكبر من أو يساوي صفر. الآن نفرض أن المبرهنة صحيحة إذا كان الرسم مترابطاً وعدد رؤوسه أقل من أو يساوي k. الآن، نفرض أن $G' = (V', E')$ رسم مترابط حيث $|V'| = k+1$. ضع

$S = \{ m :$ يوجد رسم مترابط عدد رؤوسه $k+1$ وعدد أضلاعه $m \}$.

بما أن $|E'| \in S$ فإن $S \neq \phi$ وبالاستناد إلى مبدأ الترتيب الحسن، نجد أنه يوجد عــدد أصــغــري t في S . إذن، يوجــد رسم مـــتـــرابط $G = (V, E)$ حـــيث $|V'| = k+1, |E| = t$. نختار أي ضلع $e \in E$ ونعتبر الرسم $(G-e) = (V, E-\{e\})$ ، من تعريف t ينتج أن $G-e$ رسم غير مترابط . وبما أن G مترابط فإننا نجد أن $G-e$ يتكون من مركبتين $C_1 = (V_1, E_1)$ و $C_2 = (V_2, E_2)$. بالاستناد إلى فرض الاستقراء نجد أن $|E_1| \geq |V_1|-1$ و $|E_2| \geq |V_2|-1$. إذن $|E_1|+|E_2| \geq |V_1|+|V_2|-2$ وبالتـــالي، فـــإن $|E_1|+|E_2|+1 \geq |V_1|+|V_2|-1$. إذن $|E| \geq |V|-1$. ولكن من تعـــريف t ، نجـــد أن $|E| = t \geq |E'|$. إذن $|E'| \geq |V|-1 = |V'|-1$. Δ

تعريف (٦,٧)

ليكن $G = (V, E)$ رسمًا وليكن $e \in E$. نقول إن e جسر في G إذا كان عدد مركبات $G-e$ أكبر من عدد مركبات G .

مبرهنة (٦,٨)

ليكن $G = (V, E)$ رسمًا وليكن $e \in E$ عندئذ، إن e جسر في G إذا وفقط إذا كان e غير محتوى في أية دورة من دورات G .

البرهان

نفرض أن $e = \{x, y\}$ جسر في G . إذن $G-e$ غير مترابط . نفرض أن e محتوى في دورة . لتكن هذه الدورة هي :

$a = x_1, e_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, e_{i-1}, x_i = x, e_i = e, x_{i+1} = y, \ldots, x_n = a$. إذن $x, e_{i-1}, x_{i-1}, \ldots, x_1 = x_n, e_{n-1}, \ldots, y$ و e, y, x ممران من x إلى y . بالمثل هناك ممران من y إلى x . وبالتالي، إن أي رأسين مرتبطين بوساطة ممر يحتوي على e فإنهما

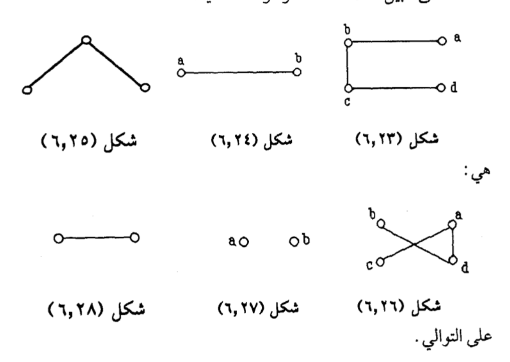
مرتبطان بممر لايحتوي على e وبما أن G مترابط فإن G - e مترابط . إن هذا يناقض أن G - e غير مترابط وبالتالي، فإن e غير محتوى في أية دورة من دورات G .

الآن نفرض أن e غير محتوى في أية دورة ونثبت أن e جسر . في الحقيقة، سنثبت المكافىء العكسي . لذلك، نفرض أن e ليس جسراً في G . إذن G - e مترابط . ليكن $e = \{x , y\}$، إذن يوجد ممر y , ... , x في G- e وبالتالي، فإن x , e , y , ... ,x دورة في G . Δ

تعريف (٦,٨)

ليكن $G = (V,E)$ رسمًا بسيطًا . نعرف الرسم البسيط $G^c = (V , E^c)$ كمايلي : لكل $x , y \in V$ حيث $x \neq y$ فإن $\{x , y\} \in E^c$ إذا وفقط كان $\{x , y\} \notin E$. نقول إن G^c هو الرسم المتمم للرسم G .

فعلى سبيل المثال متممات الرسومات التالية :



شكل (٦,٢٣) شكل (٦,٢٤) شكل (٦,٢٥)

هي :

شكل (٦,٢٦) شكل (٦,٢٧) شكل (٦,٢٨)

على التوالي .

مبرهنة (٦,٩)

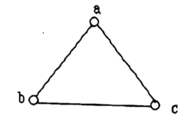
إذا كان G رسمًا بسيطًا فإن G أو G^c رسم مترابط .

البرهان

نفرض أن G غير مترابط ونثبت أن G^c مترابط . لتكن $C_1, C_2, \dots, C_m$ هي مركبات G وليكن $x, y \in V$ حيث $x \neq y$. نفرض أن $C_i = (V_i, E_i)$ لكل $i = 1, 2, \dots, m$. إذا كان يوجد $r \neq k$ حيث $x \in V_r$ ، $y \in V_k$ فإن $\{x, y\} \in E^c$ وبالتالي ، فإن $x, \{x, y\}, y$ ممر من x إلى y في G^c . أما إذا كان يوجد t حيث $x, y \in V_t$. ففي هذه الحالة نختار أي رأس $z \in V_r$ حيث $r \neq t$. إذن ، $\{x, z\}, \{y, z\} \in E^c$ وبالتالي ، فإن $x, \{x, z\}, z, \{z, y\}, y$ ممر من x إلى y في G^c . إذن G^c رسم مترابط . Δ

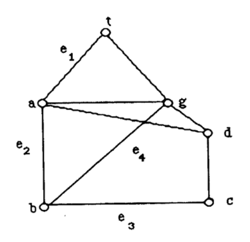
تمارين (٦,٣)

(١) جد جميع الرسوم الجزئية للرسم المعطى بالشكل (٦,٢٩)



شكل (٦,٢٩)

(٢) ليكن G هو الرسم المعطى بالشكل (٦,٣٠) :

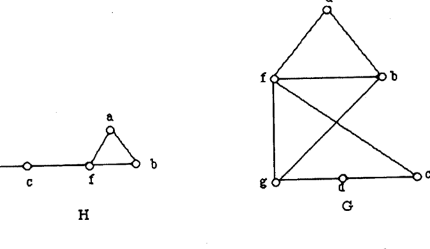


شكل (٦,٣٠)

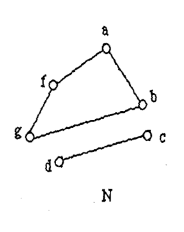
جد الرسم الجزئي المحدث بوساطة :

(أ) $\{a, b, d, g\}$ (ب) $\{a, b, t, c\}$ (جـ) $\{e_1, e_3, e_4\}$

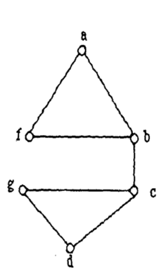
(٣) بين ما إذا كان أي من الرسوم H , M , N رسمًا جزئيًا من الرسم G .



شكل (٦,٣١) **شكل (٦,٣٢)**



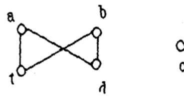
شكل (٦,٣٣)



شكل (٦,٣٤)

(٤) أثبت أنه إذا كان G رسمًا يحتوي على رأسين فرديين فقط فإن هذين الرأسين يجب أن ينتميا إلى نفس المركبة في G .

(٥) جد الرسم المتمم للرسم في الشكل (٦,٣٥) .



شكل (٦,٣٥)

(٦) ماهي العلاقة بين عدد أضلاع الرسم G وعدد أضلاع الرسم G^c .

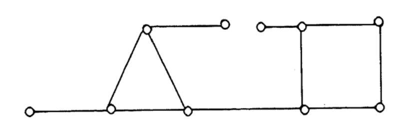
(٧) ليكن $G = (V, E)$ رسمًا بسيطًا.

(أ) إذا كان $|V| = 6$ فأثبت أنه يوجد دورة طولها 3 في G أو G^c.

(ب) بين أن العبارة (أ) ليست صحيحة إذا كان $|V| = 5$.

(٨) ليكن $G=(V,E)$ رسمًا وليكن $m = \min \{ \deg x : x \in V \}$ و $M = \max \{\deg x : x \in V\}$.
أثبت أن $m\,|V| \leq 2\,|E| \leq M|V|$.

(٩) جد جميع الجسور في الرسم المعطى بالشكل (٦,٣٦).



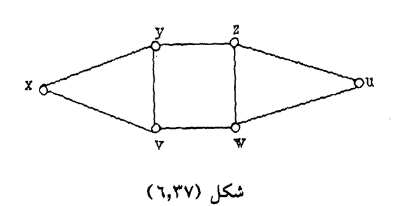
شكل (٦,٣٦)

(١٠) ليكن $G = (V, E)$ رسمًا مترابطًا حيث لايحتوي على دارات. أثبت أنه يوجد على الأقل رأسان $x \neq y$ في V حيث يكون $\deg x = \deg y = 1$.

(١١) إذا كان $G = (V, E)$ رسمًا مترابطًا ولايحتوي على دارات حيث $|V| = n$ فأثبت أن $|E| = n-1$.

[إرشاد : استخدم تمرين (١١) والاستقراء الرياضي].

(١٢) ليكن $G = (V, E)$ رسمًا ولتكن $S \subseteq V$. نقول إن S مجموعة قطع للرسم G إذا كان الرسم الجزئي $G-S$ غير مترابط. ولا توجد مجموعة جزئية فعلية T من S حيث يكون $G-T$ غير مترابط. جد مجموعتي قطع للرسم المعطى في الشكل (٦,٣٧):



شكل (٦,٣٧)

(١٣) ليكن $G = (V, E)$ رسمًا بسيطًا حيث $|V| \geq 3$. برهن أن العبارتين التاليتين متكافئتان :

(i) G مترابط ولايحتوي على رأس x حيث {x} مجموعة قطع .

(ii) إذا كانت $x \neq y \neq z$ ثلاثة رؤوس مختلفة فإنه يجب أن يوجد ممر من x إلى y لايحتوي z .

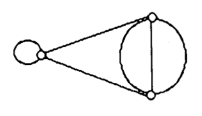
(٦,٤) الرسوم المنتظمة، الرسوم التامة والرسوم ثنائية التجزئة
Regular, Complete and Bipartite Graphs

تعريف (٦,٩)

ليكن $G = (V, E)$ رسمًا وليكن $r \geq 0$ عددًا صحيحًا . نقول إن G رسم منتظم من النوع r إذا كان $deg\, x = r$ لكل $x \in V$. نقول إن G رسم منتظم إذا كان يوجد عدد صحيح $r \geq 0$ حيث $deg\, x = r$ لكل $x \in V$.

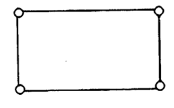
مثال (٦,٩)

(أ) الرسم التالي رسم منتظم من النوع 4 :



شكل (٦,٣٨)

(ب) الرسم التالي رسم منتظم من النوع 2 :



شكل (٦,٣٩)

مبرهنة (٦,١٠)

إذا كان $G = (V, E)$ رسمًا منتظمًا من النوع r وكان $n = |V|$ فإن $|E| = \frac{nr}{2}$.

البرهان

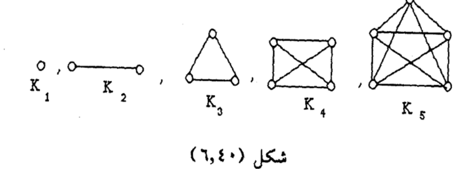
نعلم أن $2|E| = \sum_{x \in V} \deg x$. إذن $2|E| = \sum_{x \in V} r$ وبالتـــالي، فـــإن

$|E| = 2\,nr$. إذن $|E| = \frac{nr}{2}$. Δ

تعريف (٦,١٠)

نعرف الرسم التام K_n بأنه الرسم البسيط الذي عدد رؤوسه يساوي n والذي يحقق الشرط التالي : إذا كان x و y رأسين مختلفين في K_n فإنه يوجد ضلع واحد فقط e في K_n حيث $e = \{x , y\}$.

الشكل التالي يبين بعض الرسوم التامة :



شكل (٦,٤٠)

مبرهنة (٦,١١)

إذا كان $K_n = (V, E)$ فإن $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$.

البرهان

واضح أن K_n منتظم من النوع $(n-1)$ وبالتالي، فإن $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ Δ

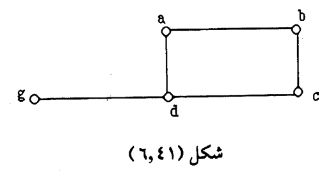
تعريف (٦,١١)

(أ) *ليكن $G = (V, E)$ رسمًا بسيطًا. نقول إن G ثنائي التجزئة إذا كانت توجد تجزئة $\{V_1, V_2\}$ للمجموعة V حيث إذا كان $e \in E$ فإن طرفا للضلع e ينتمي إلى V_1 ولكن الطرف الآخر للضلع e ينتمي إلى V_2. (تذكر أن التجزئة تعني $V_1 \neq \phi$، $V_2 \neq \phi$، $V_1 \cap V_2 = \phi$، $V = V_1 \cup V_2$). في هذه الحالة غالبًا مانستخدم الرمز $(V_1 \cup V_2, E)$ بدلا من (V, E).*

(ب) *ليكن $G = (V_1 \cup V_2, E)$ رسمًا ثنائي التجزئة. نقول إن G رسم ثنائي التجزئة تام إذا كان كل عنصر في V_1 مجاورًا لكل عنصر في V_2. في هذه الحالة، إذا كان $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ فإننا نرمز لهذا الرسم بالرمز $K_{m,n}$.*

مثال (٦,١٠)

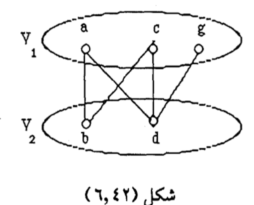
(أ) الرسم



شكل (٦,٤١)

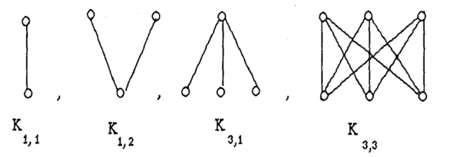
ثنائي التجزئة والشكل (٦,٤٢) يبين تجزئة مناسبة لمجموعة الرؤوس :

ثنائي التجزئة والشكل (٦,٤٢) يبين تجزئة مناسبة لمجموعة الرؤوس :



شكل (٦,٤٢)

(ب) الشكل التالي يبين بعض الرسوم التامة ثنائية التجزئة :



شكل (٦,٤٣)

مبرهنة (٦,١٢)

إذا كان $K_{m,n} = (V_1 \cup V_2\ , E)$ حيث $|V_1| = m$ ، $|V_2| = n$ *فإن* $|E| = mn$.

البرهان

بما أن :

$$\sum_{x\in V_1} \deg x + \sum_{x\in V_2} \deg x = 2|E|$$

فإن :

$$\sum_{x\in V_1} n + \sum_{x\in V_2} m = 2|E|$$

إذن $mn + nm = 2|E|$ ومن ثم فإن $|E| = mn$. Δ

تعريف (٦,١٢)

ليكن $G = (V, E)$ رسمًا وليكن $x, y \in V$ حيث $x \neq y$. نرمز للمسافة بين x وy بالرمز $d(x, y)$ ونعرفها كما يلي :

(أ) إذا كان لا يوجد ممر بين x وy فإن $d(x, y) = \infty$.

(ب) إذا كان يوجد ممر من x إلى y فإن $d(x,y) = min\{L(w) : w$ ممر من x إلى $y\}$.

كذلك، نعرف المسافة $d(x, x)$ بين x وx كما يلي : $d(x, x) = 0$.

مبرهنة (٦,١٣)

ليكن $G = (V,E)$ رسمًا حيث $|V| > 1$. عندئذ، إن G ثنائي التجزئة إذا وفقط إذا كان لا يحتوي على دورات فردية .

البرهان

نفرض أن $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ثنائي التجزئة . لتكن $v_1, e_1, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_n$ دورة من a إلى a . نفرض أن $a \in V_1$ (إذا كان $a \in V_2$ فإن البرهان مشابه لما سنفعله) . بما أن $v_1 \in V_1$ فإن $v_2 \in V_2$ ، $v_3 \in V_1$ ، $v_4 \in V_2$ وهلم جرا . إذن لكل $v_i \in V_1$

عـدد فـردي i و $v_j \in V_2$ لكل عـدد زوجي j . إذن n عـدد فـردي وبالتـالي ، فـإن $v_1 , e_1 , \ldots , v_n$ دورة زوجية طولها n-1 .

الآن نفـرض أن $G = (V , E)$ لا يحتـوي على دورات فـردية . بما أن G ثنائي التجزئة إذا وفقط إذا كانت كل مركبة (مترابطة) من مركبات G ثنائية التجزئة فإننا نفرض أن G رسم مترابط . نختار أي رأس $a \in V$ ونعرف V_1 و V_2 كمايلي :

$$V_1 = \{ x \in V : \text{عدد زوجي } d(a,x) \}$$

$$V_2 = \{ x \in V : \text{عدد فردي } d(a,x) \} = V - V_1$$

ليكن $b , d \in V_2$ حيث $b \neq d$. نريد أن نثبت أن b و d غيـر متـجاورين ، وذلك بوسـاطة التناقض . نفـرض أن $\{b, d\} \in E$. بما أن $b \in V_2$ فـإنه يوجـد ممر فـردي $x_1 , e_1\ x_2 , \ldots , e_{n-1} , x_n$ من a إلى b طوله $d(a,b)$. بالمثل ، يوجـد ممر فـردي $y_1 , c_1 , y_2 , \ldots , c_{m-1} , y_m$ مـن a إلـى d طـولـه $d(a , d)$. بمـا أن $x_1 = y_1 = a$ و $x_n = b \neq d = y_m$ فإننا نستطيع أن نجد عدداً i حيث :

(أ) $1 \leq i < n$ ، (ب) يوجد $1 \leq j \leq m$ حيث $x_i = y_j$ ، (جـ) i هو أكبر عدد يحقق (أ) و (ب) . الآن ، نـريـد إثبـات أن $j = i$. إذا كـان $j > i$ فـإن $x_1 , e_1 , x_2 \ldots , x_i = y_j , c_j , \ldots , y_m$ مسار من a إلى d وطوله أصغر من $d(a,d)$ وهذا يناقض تعـريف $d(a,d)$. بالمثل إذا كـان $i > j$ فـإننا نحـصـل على تناقض . إذن $i = j$.

الآن ، نجد بسهولة أن :

$$y_i = x_i , e_i , \ldots , x_n = \{ b ,d \} , d = y_m , c_{m-1} , \ldots , y_i = x_i$$

دورة فردية ، وهذا يتناقض مع فرضنا أن G لا يحتوي على دورات فردية .

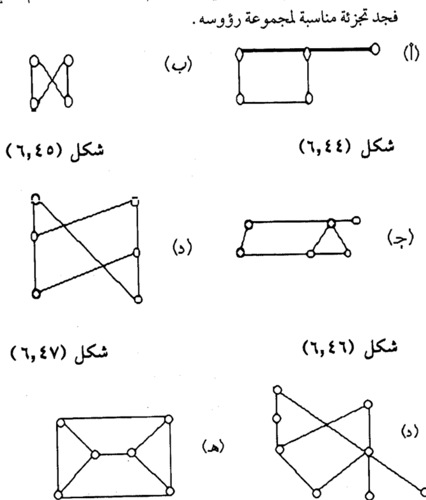
إذن ، b و d غير متجاورين . بالمثل ، إذا كان $b , d \in V_1$ حيث $b \neq d$ فإن b و d غير متجاورين . إذن ، G ثنائي التجزئة . Δ

تمارين (٦,٤)

(١) أعط مثالا على رسم بسيطحيث يكون منتظمًا وغير تام.

(٢) ماهو الرسم المتمم للرسم K_n ؟

(٣) بين ما إذا كان الرسم المعطى ثنائي التجزئة أم لا، وإذا كان الرسم ثنائي التجزئة فجد تجزئة مناسبة لمجموعة رؤوسه.



شكل (٦,٤٤) شكل (٦,٤٥)

شكل (٦,٤٦) شكل (٦,٤٧)

شكل (٦,٤٨) شكل (٦,٤٩)

(٤) ليكن $G=(V,E)$ رسماً بسيطاً حيث $|V|=n$ و $|E|>\frac{n^2}{4}$. أثبت أن G لا يمكن أن يكون ثنائي التجزئة .

(٥) جد مصفوفة الجوار لكل من K_5 و $K_{2,3}$.

(٦) أعط مثالا لرسم بسيط منتظم من النوع 1 ، 2 و 3 .

(٧) أثبت أن $K_{m,n}$ رسم منتظم إذا وفقط إذا كان $m=n$.

(٨) إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بسيطاً منتظماً من النوع k وكان $|V|=n$ فأثبت أن k زوجي أو n زوجي .

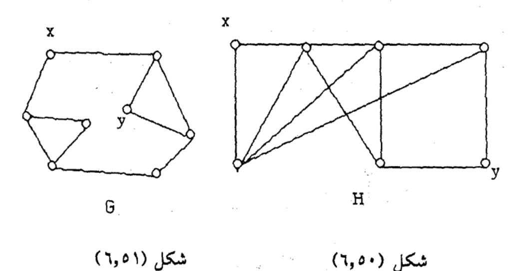
(٩) جد مثالا على رسم ثنائي التجزئة منتظم من النوع 2 ويحتوي على 6 رؤوس .

(١٠) جد مثالا على رسم ثنائي التجزئة منتظم من النوع 3 ويحتوي على 8 رؤوس .

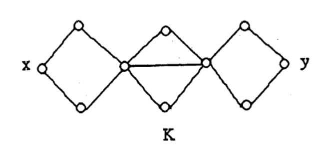
(١١) جد مثالا على رسم ثنائي التجزئة منتظم من النوع r ويحتوي على $2r+2$ رأساً .

(١٢) جد الرسم المتمم للرسم $K_{3,3}$.

(١٣) جد $d(x,y)$ لكل رسم من الرسومات التالية :



شكل (٦,٥١) شكل (٦,٥٠)



شكل (٦,٥٢)

(١٤) ليكن $G = (V, E)$ رسمًا مترابطًا. نعرف قطر G ونرمز له بالرمز $D(G)$ كـــالتـــالي: $D(G) = \max\{d(x, y) : x, y \in V\}$. جـــد قطر كل من الرسومات في تمرين (١٣).

(٦,٥) الأشجار
Trees

تعريف (٦,١٣)

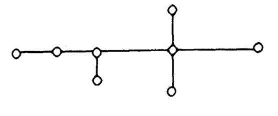
ليكن $G = (V, E)$ رسمًا. نقول إن G غابة إذا كان لا يحتوي على دورات. ونقول إن G شجرة إذا كان G مترابطًا ولا يحتوي على دورات. (لاحظ أن كل غابة هي رسم بسيط وأن كل شجرة هي رسم بسيط أيضًا).

مثال (٦,١١)

(أ) الرسم التالي هو غابة:

شكل (٦,٥٣)

(ب) الرسم التالي هو شجرة :



شكل (٦,٥٤)

مبرهنة (٦,١٤)

لتكن $T = (V, E)$ شجرة حيث $|V| > 1$، عندئذ، يوجد على الأقل رأسان في T حيث تكون درجة كل منهما تساوي 1.

البرهان

نختار ممراً $x_1, e_1, x_2, \ldots, e_{m-1}, x_m$ في T حيث يكون طوله أعظميًا بالنسبة إلى ممرات T. نفرض أن $\deg x_1 > 1$. عندئذ يوجد $y \neq x_2$ حيث $\{x_1, y\} \in E$. بما أن T لاتحتوي على دورات فإن $y \neq x_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, m$. وبالتالي، فإن $y, \{y, x_1\}, x_1, e_1, \ldots, x_m$ ممر في T وطوله أكبر من طول الممر الأعظمي المختار. إن هذا تناقض وبالتالي، فإن $\deg x_1 = 1$. بالمثل، يمكن إثبات أن $\deg x_m = 1$. Δ

مبرهنة (٦,١٥)

لكل عدد صحيح $n \geq 1$، فإن كل شجرة عدد رؤوسها n يكون عدد أضلاعها $n - 1$.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n. إذا كان n = 1 فإن عدد الأضلاع صفر وبالتالي، فإن المبرهنة صحيحة من أجل n = 1. الآن نفرض أن كل شجرة عدد رؤوسها k يكون عدد أضلاعها k-1 حيث k ≥1 عدد صحيح. لتكن T=(V , E) شجرة حيث |V| = k+1 . بالاستناد إلى المبرهنة (٦,١٤) نجد أنه يوجد x∈V حيث deg x = 1 . بما أن T شجرة فإن T - x شجرة عدد رؤوسها k، وباستخدام فرض الاستقراء نجد أن |V - {x}|-1 = |E|-1 . إذن |E| = |V|-1 . Δ

مبرهنة (٦,١٦)

ليكن T = (V , E) رسمًا مترابطًا حيث n = |V|. عندئذ، إن T شجرة إذا وفقط إذا كان |E| = n-1 .

البرهان

لتكن T شجرة. من المبرهنة (٦,١٥) ينتج أن |E| = n-1 .

الآن نفرض أن T رسم مترابط حيث |V| = n و |E| = n-1 . لإثبات أن T شجرة يكفي أن نثبت أن T لاتحتوي على دورات. نفرض أن $x_1 , e_1 , ... , x_n$ دورة من a إلى a. من المبرهنة (٦,٨)، ينتج أن e_1 ليس جسرًا في T وبالتالي، فإن $T - e_1$ رسم مترابط عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه n-2، إن هذا يناقض المبرهنة (٦,٧) وبالتالي، فإن T لاتحتوي على دورات. Δ

مبرهنة (٦,١٧)

ليكن T = (V , E) رسمًا لا يحتوي على دورات حيث n=|V|، عندئذ، إن T شجرة إذا وفقط إذا كان |E| = n-1 .

البرهان

لتكن T شجرة. من المبرهنة (٦,١٥) ينتج أن $|E| = n-1$.

الآن نفرض أن T رسم لايحتوي على دورات حيث $|V| = n$ و $|E| = n-1$.
لإثبات أن T شجرة يكفي أن نثبت أن T مترابط. لتكن $C_i = (V_i , E_i)$ حيث $i = 1 , ... , m$ هي مركبات T . بما أن T لا تحتوي على دورات فإن كل C_i لاتحتوي على دورات، وبالتالي، فإن كل C_i هي شجرة. إذن، $|E_i|=|V_i| -1|$ لكل $i = 1 , ... , m$. إذن

$$|E_1| + ... + |E_m| = (|V_1| -1) + ... + (|V_m| -1)$$

وبالتالي، فإن $|E| = |V| - m$. إذن $n-1 = n-m$ وبالتالي، فإن $m=1$. إذن، T مترابط . ∆

مبرهنة (٦,١٨)

ليكن $T = (V , E)$ رسمًا مترابطًا. عندئذ، إن T شجرة إذا وفقط إذا كان كل ضلع في T جسراً.

البرهان

لتكن $T = (V , E)$ شجرة. إذن $|E|=|V|-1$. ليكن $e \in E$. عندئذ، إن $T - e$ رسم عدد رؤوسه $|V|$ وعدد أضلاعه $|V| -2$. بالاستناد إلى المبرهنة (٦,٧) نجد أن $T - e$ رسم غير مترابط وبالتالي، فإن e جسر في T .

الآن نفرض أن كل ضلع في T جسر، بالاستناد إلى المبرهنة (٦,٨)، نجد أن T لا يحتوي على دورات وبالتالي، فإن T شجرة. ∆

مبرهنة (٦,١٩)

ليكن $T = (V, E)$ رسمًا بسيطًا. عندئذ، إن T شجرة إذا وفقط إذا كان T

يحقق الشرط التالي : إذا كان $x, y \in V$ حيث $x \neq y$ فإنه يوجد ممر وحيد من x إلى y.

البرهان

لتكن T شجرة وليكن $x, y \in V$ حيث $x \neq y$. بما أن T رسم مترابط فإنه يوجد ممر من x إلى y. بما أن T لاتحتوي على دورات فإننا بالاستناد إلى المبرهنة (٦,٥)، نجد أن هذا الممر وحيد.

الآن نفرض أن الشرط المذكور أعلاه متحقق. يستطيع القارىء أن يثبت بسهولة أن T مترابط ولايحتوي على دورات، وبالتالي، فإن T شجرة. Δ

مبرهنة (٦,٢٠)

ليكن $T = (V, E)$. عندئذ، إن T شجرة إذا وفقط إذا كان T لايحتوي على دورات وكان T يحقق الشرط التالي : إن إضافة ضلع جديد إلى E تجعلنا نحصل على رسم يحتوي على دورة وحيدة.

البرهان

لتكن T شجرة وليكن $\{x, y\} = e \notin E$. ليكن $G = (V, E \cup \{e\})$. بما أن T شجرة فإن T لاتحتوي على دورات. بالاستناد إلى المبرهنة (٦,١٩)، نجد أنه يوجد ممر وحيد $x, e_1, \ldots, y$ من x إلى y في T. إذن $x, e_1, \ldots, y, e, x$ دورة في G. واضح أن هذه الدورة وحيدة في G لأنه إذا كان يوجد دورتان مختلفتان فإن كلا منهما تحتوي على e وبالتالي، فإنه يوجد ممران مختلفان من x إلى y في T.

الآن نفرض أن T رسم لايحتوي على دورات ويحقق الشرط المذكور أعلاه.

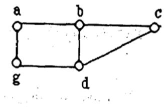
إذا كـان يوجـد $x, y \in V$ حـيث x غـيـر مـرتبط بالرأس y فـإن الرسم $G = (V, E \cup \{e\})$ حـيث $e \notin E$ $\{x, y\} = e$ لايحتـوي على دورات. إذن، T رسـم مترابط وبالتالي، فإن T شجرة. Δ

تعريف (٦,١٤)

ليكن $G = (V, E)$ رسمًا وليكن $T = (V(T), E(T))$ رسمًا جزئيًا من G. نقول إن T شجرة في G إذا كان T شجرة. نقول إن T شجرة مُولِّدة للرسم G إذا كانت T شجرة في G وكان T رسمًا جزئيًا مولدًا للرسم G (تذكر أنه في هذه الحالة يجب أن يكون $V(T) = V$).

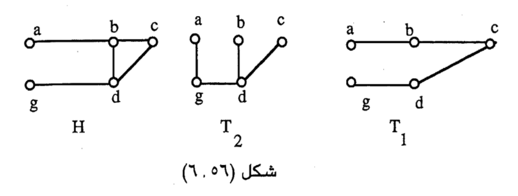
مثال (٦,١٢)

ليكن G هو الرسم المعطى بالشكل (٦,٥٥)



شكل (٦,٥٥)

نعتبر الرسوم الجزئية التالية :



شكل (٦ . ٥٦)

إن كلاً من T_1 و T_2 شجرة مولدة للرسم G . كذلك إن H رسم جزئي مولد للرسم G ولكنه ليس شجرة .

مبرهنة (٦ , ٢١)

ليكن $G = (V, E)$ رسمًا . عندئذ يكون G مترابطًا إذا وفقط إذا كان يوجد شجرة مولّدة للرسم G .

البرهان

لنفرض أنه توجد شجرة T مولدة للرسم G . بما أن T رسم مترابط فإن G رسم مترابط .

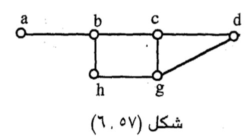
الآن نفرض أن G رسم مترابط . نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الأضلاع n لإثبات مايلي : لكل عدد صحيح $n \geq 0$ فإن كل رسم مترابط عدد أضلاعه n يكون له شجرة مولدة . إذا كان $n = 0$ فإن عدد الأضلاع صفر وبالتالي، فإن المطلوب صحيح . الآن نفرض أن كل رسم مترابط عدد أضلاعه k يكون له شجرة مولدة حيث $k \geq 0$ عدد صحيح . ليكن $H = (V(H), E(H))$ رسمًا مترابطًا حيث $|E(H)| = k+1$. إذا كان H لا يحتوي على دورات فإن H شجرة وبالتالي، فإن H شجرة

مولدة للرسم H . إذن ، لنفرض أن H يحتوي على دورات . ليكن e ضلعا محتوى في إحدى هذه الدورات . إذن ، e ليس جسراً في H وبالتالي ، فإن H - e رسم مترابط عدد أضلاعه k . بالاستناد إلى فرض الاستقراء نجد أنه توجد شجرة T مولدة للرسم H - e . واضح أن أية شجرة مولدة للرسم H - e هي شجرة مولدة للرسم H . إذن ، T شجرة مولدة للرسم H . Δ

لاحظ أن البرهان السابق يعطينا طريقة لإنشاء الشجرة المولدة . ببساطة نقوم بالتخلص من الدورات عن طريق الحذف المتتابع لبعض الأضلاع .

مثال (٦,١٣)

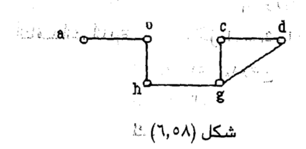
جد شجرة مولدة للرسم G حيث G هو الرسم في الشكل (٦,٥٧)



شكل (٦,٥٧)

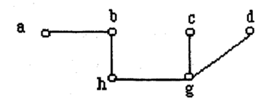
الحل

سنستخدم الرؤوس للتعبير عن الدورات . نختار الدورة b , c , g , h , b ونحذف أحد أضلاعها وليكن { b , c } فنحصل على الرسم في الشكل (٦,٥٨) .



شكل (٦,٥٨)

الآن نختار دورة في الرسم الجديد ونحذف أحد أضلاعها. نحذف { c, d } من الدورة c , d , g , c فنحصل على الرسم في الشكل (٦, ٥٩).



شكل (٦,٥٩)

واضح أن الرسم الأخير شجرة مولدة للرسم G.

إن الطريقه المتبعة في المثال (٦, ١٣) لإنشاء الشجرة المولدة ليست مناسبة للاستخدام في الحاسوب. في ما يلي سنقدم بعض الخوارزميات التي تعطينا الشجرة المولدة والتي تناسب الحاسوب.

خوارزمية (٦, ١)

ليكن $G = (V, E)$ رسمًا مترابطًا. من أجل الحصول على شجرة مولدة للرسم G نفذ الخطوات التالية:

(١) اختر أي رأس $x_1 \in V$ وضع $V_1 = \{x_1\}$ و $E_1 = \phi$ و $T_1 = (V_1, E_1)$.

(٢) نفرض أننا قد أنشأنا $T_j = (V_j, E_j)$ لكل $j = 1, 2, \ldots, k$. جد ضلعًا $e_k = \{y, x_{k+1}\} \in E$ حيث $y \in V_k$ و $x_{k+1} \notin V_k$ وضع $V_{k+1} = V_k \cup \{x_{k+1}\}$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$ و $T_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$.

(٣) كرر الخطوة (٢) كلما أمكن ذلك.

مبرهنة (٦,٢٢)

إذا كان $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً فإن الخوارزمية (٦,١) تعطي شجرة مولدة للرسم G.

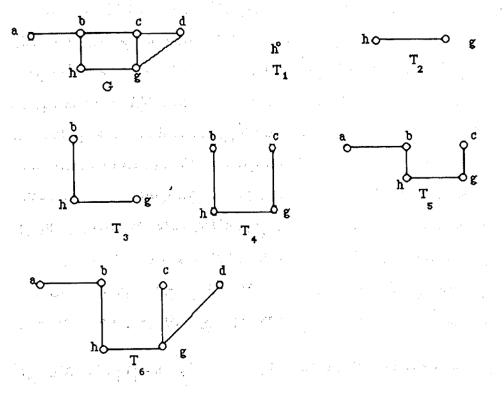
البرهان

نفرض أن الخوارزمية تتوقف بعد m خطوة. إذن، نحصل على $T_m = (V_m , E_m)$. نريد اثبات أن T_m شجرة مولدة للرسم G. سنثبت أولاً أن T_m شجرة وذلك باستخدام الاستقراء الرياضي على n لاثبات ما يلي: لكل عدد صحيح $1 \le n \le m$ فإن T_n شجرة. إذا كان $n = 1$ فإن $E_1 = \phi$ وبالتالي، فإن $T_1 = (V_1 , E_1)$ شجرة. الآن نفرض أن $T_k = (V_k , E_k)$ شجرة حيث $1 \le k < m$ عدد صحيح. من الخطوة (٢) في الخوارزمية (٦,١) نعلم أنه يوجد $y \in V_k$ و $x_{k+1} \notin V_k$ حيث $\{y , x_{k+1}\} = e_k \in E$ ، $V_{k+1} = V_k \cup \{x_{k+1}\}$ ، $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$ و $T_{k+1} = (V_{k+1} , E_{k+1})$. بما أن T_k لاتحتوي على دورات فإن T_{k+1} لا يحتوي على دورات. واضح أن x_{k+1} مجاور للرأس $y \in V_k$ وبما أن T_k رسم مترابط فإن x_{k+1} مرتبط بجميع الرؤوس المنتمية إلى V_k. إذن T_{k+1} مترابط وبالتالي، فإن T_{k+1} شجرة. إذن T_m شجرة. الآن سنثبت أن T_m شجرة مولدة للرسم G. من أجل ذلك يكفي أن نثبت أن $|V| = m$. واضح أن $m \le |V|$ إذا كان $m < |V|$ فإنه يوجد رأس $x \in V$ حيث $x \notin V_m$. ليكن $y \in V_m$. بما أن G مترابط فإنه يوجد ممر $y_1 , c_1 , y_2 , \ldots , c_{r-1} , y_r$ من y إلى x. ليكن $1 \le j < r$ هو أكبر عدد صحيح حيث $y_j \in V_m$. إذن، $y_{j+1} \notin V_m$ و $\{y_j , y_{j+1}\} = e_j \in E$ إن هذا يناقض الخطوة (٣) في الخوارزمية (٦,١) وبالتالي، فإن $|V| = m$. Δ

مثال (٦,١٤)

جد شجرة مولدة للرسم G المعطى في المثال (٦,١٣) مستخدمًا الخوارزمية (٦,١).

الحل



شكل (٦,٦٠)

إذن، T_6 شجرة مولدة للرسم G. لاحظ أنه توجد أشجار أخرى مولدة للرسم G.

ملاحظات

(i) إذا استخدمنا الخطوة (٢أ) المذكورة أدناه بدلا من الخطوة (٢) في الخوارزمية (١ ,٦) فإننا نحصل على خوارزمية تعطينا شجرة مولدة للرسم G، تسمى هذه الشجرة شجرة تقص عرضي مركزها x_1 للرسم G.

(٢أ) نفرض أننا قد أنشأنا $T_j = (V_j , E_j)$ من أجل $j = 1 , 2 , \ldots , k$. ليكن r هو أصغر عدد بين الأعداد $1, 2, \ldots, k$ حيث يوجد ضلع $\{x_r , x_{k+1}\} = e_k \in E$ يحقق $x_r \in V_j$ و $x_{k+1} \notin V_k$. ضع $V_{k+1} = V_k \cup \{x_{k+1}\}$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$ و $T_{k+1} = (V_{k+1} , E_{k+1})$.

(ii) بالمثل، يمكن الحصول على شجرة تقص عمقي مركزها x_1 للرسم G إذا استخدمنا « r هو أكبر » بدلاً من « r هو أصغر » في الخطوة (٢أ).

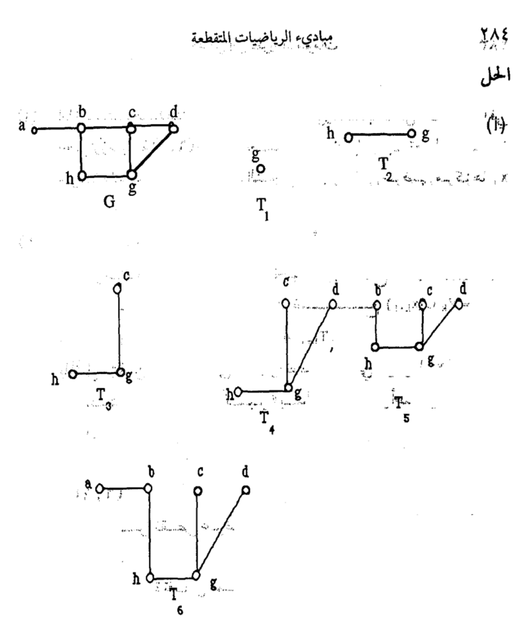
مثال (١٥ ,٦)

(i) جد شجرة تقص عرضي مركزها g للرسم G المعطى في المثال (١٣ ,٦).

(ii) جد شجرة تقص عمقي مركزها g للرسم G المعطى في المثال (١٣ ,٦).

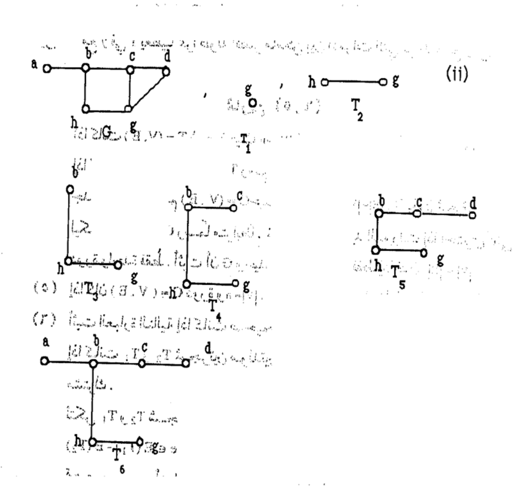
الحل

(أ)



شكل (٦,٦١)

إن T_6 هي الشجرة المطلوبة.



شكل (٦/٦٢)

إن T_6 هي الشجرة المطلوبة.

ملاحظة

إذا كانت T شجرة تقص عرضي مركزها x للرسم G وكان y أي رأس في G فإنه

يمكن الإثبات أن $d(x,y)$ في T يساوي $d(x,y)$ في G، وبالتالي، فإن الممر الوحيد الذي يربط x مع y في T يعطينا ممراً طوله أقصر مّامكن بين الممرات التي تربط x مع y في G.

تمارين (٦,٥)

(١) إذا كانت $T = (V, E)$ شجرة حيث $|V| = n$ فجد مجموع درجات رؤوسها.

(٢) إذا كانت T شجرة فأثبت أن T رسم ثنائي التجزئة.

(٣) جد مثالا على رسم $G = (V, E)$ حيث يحقق: $|E| = |V| - 1$ ولا يكون شجرة.

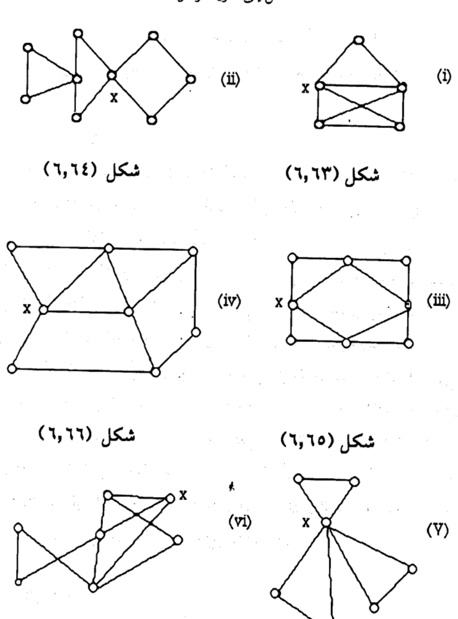
(٤) ليكن $G = (V, E)$ رسمًا مترابطًا. نقول إن G وحيد الدورات إذا احتوى على دورة واحدة فقط. أثبت أن G وحيد الدورات إذا وفقط إذا كان $|E| = |V|$.

(٥) إذا كان $G = (V, E)$ دورة و $|V| = n$. فكم عدد الأشجار المولدة للرسم G؟

(٦) أثبت العبارة التالية إذا كانت صحيحة أو أعط مثالا مناقضًا إذا كانت خاطئة: إذا كانت T_1 و T_2 شجرتين مولدتين للرسم G فيجب أن يكون بينهما ضلع مشترك.

(٧) لتكن T_1 و T_2 شجرتين مولدتين للرسم $G = (V, E)$ وليكن $e \in E$ حيث $e \in E(T_1) - E(T_2)$. أثبت أنه يجب أن يوجد شجرة مولدة T_3 للرسم G تحتوي e وجميع أضلاع T_2 ماعدا ضلعًا واحدًا.

(٨) في ما يلي: (أ) جد شجرة مولدة للرسم المعطى جذرها x، (ب) جد شجرة تقص عرضي للرسم المعطى مركزها x، (جـ) جد شجرة تقص عمقي للرسم المعطى مركزها x.



شكل (٦,٦٣)

شكل (٦,٦٤)

شكل (٦,٦٥)

شكل (٦,٦٦)

شكل (٦,٦٧)

شكل (٦,٦٨)

(٦,٦) الأشجار المرتبة ذوات الجذور وتطبيقاتها

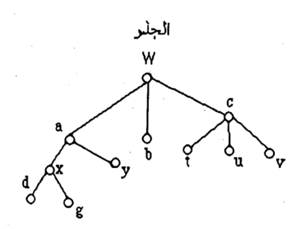
Ordered Rooted Trees And Its Applications

تعريف (٦,١٥)

لتكن $T = (V, E)$ شجرة. نختار أي رأس $r \in V$ ونسميه جذر الشجرة T. نسمي T (أو الزوج (T, r)) شجرة ذات جذر. نعلم من المبرهنة (٦,١٩) أن أي رأسين في T مرتبطان بممر وحيد. نُعَرِّف مستوى (أو عمق) الرأس $x \neq r$ على أنه طول الممر الوحيد الذي يربط x مع r، كما نُعَرِّف مستوى r على أنه الصفر، كذلك، نُعَرِّف ارتفاع T على أنه العدد الأكبر بين جميع مستويات الرؤوس. إذا كان $x \in V$ حيث $x \neq r$ و $\deg x = 1$ فإننا نسمي x ورقة. إذا كان $y \in V$ ليس ورقة فإننا نسمي y رأسًا داخليًا. إذا كان P ممرًا يصل بين رأس داخلي وورقة فإننا نسمي P فرعًا. ليكن x و y رأسين مرتبطين وليكن i هو مستوى x وليكن j هو مستوى y. إذا كان $j > i$ فإننا نسمي y تابعًا للرأس x كما نسمي x مرجعًا للرأس y. إذا كان $j = i + 1$ فإننا نسمي y تابعًا مباشرًا للرأس x كما نسمي x مرجعًا مباشرًا للرأس y. ليكن $a \in V$ ولتكن $D(a) = \{x \in V : x \text{ تابع للرأس } a\} \cup \{a\}$. ليكن H هو الرسم المحدث بوساطة $D(a)$ في T. نسمي (H, a) الشجرة الجزئية ذات الجذر a.

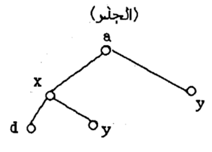
مثال (٦,١٦)

لتكن $T = (V, E)$ هي الشجرة في الشكل (٦,٦٩)



شكل (٦,٦٩)

نختار w ونسميه جذراً فتصبح T شجرة ذات جذر. إن مستوى t يساوي 2 بينما مستوى d يساوي 3. نلاحظ أن ارتفاع T يساوي 3. كذلك { d , g , b , t , u , v ,y } هي مجموعة الأوراق. نلاحظ أن مستوى a يساوي 1 بينما مستوى x يساوي 2 كما أن a و x مرتبطان، وبالتالي، فإن x تابع مباشر للرأس a بينما a مرجع مباشر للرأس x. من الشكل نجد أن الشجرة الجزئية التي جذرها a هي الشجرة في الشكل (٦,٧٠).



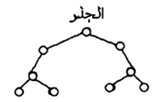
شكل (٦,٧٠)

تعريف (٦,١٦)

لتكن $T = (V, E)$ شجرة ذات جذر. لكل رأس $x \in V$ نعرف $M(x)$ كالتالي:
$M(x) = \{y : y$ تابع مباشر للرأس $x\}$. إذا كان $|M(x)| \le 2$ لكل $x \in V$ فإننا نسمي T شجرة ثنائية، وإذا كان $|M(x)| = 2$ لكل رأس داخلي x فإننا نسمي T شجرة ثنائية منتظمة.

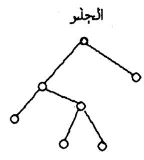
مثال (٦,١٧)

(أ) الرسم في الشكل (٦,٧١) يمثل شجرة ثنائية :



شكل (٦,٧١)

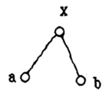
(ب) الرسم في الشكل (٦,٧٢) يمثل شجرة ثنائية منتظمة :



شكل (٦,٧٢)

تعريف (٦,١٧)

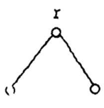
لتكن $T = (V, E)$ شجرة ذات جذر. إذا كانت $M(x)$ مجموعة مرتبة كليًا لكل رأس داخلي x فإننا نسمي T شجرة مرتبة ذات جذر. إذا كانت T شجرة ثنائية مرتبة وكان $M(x) = \{a, b\}$ وكان $a \leq b$ حيث $\leq$ هي علاقة الترتيب الكلي على $M(x)$ فإننا نسمي a التابع المباشر الأيسر للرأس x كما نسمي b التابع المباشر الأيمن للرأس x، وفي الشكل الذي يمثل T نرسم a و b كما يلي :



شكل (٦,٧٣)

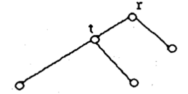
(٦,٦,١) أشجار التقصّي الثنائية (Binary search trees)

لتكن A مجموعة منتهية ولتكن $\leq$ علاقة ترتيب كلي على A. نُنشىء شجرة ثنائية مرتبة T (A) كما يلي : نختار أي عنصر من A ونسميه الجذر. إذا كان r هو الجذر فإننا نرسم الشكل (٦,٧٤) :



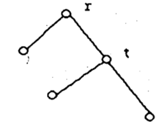
شكل (٦,٧٤)

الآن نأخذ عنصراً من {r} - A وليكن t. إذا كان t ≤ r فإننا نرسم الشكل (٦,٧٥)



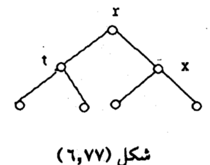
شكل (٦,٧٥)

أما إذا كان r ≤ t فإننا نرسم الشكل (٦,٧٦)



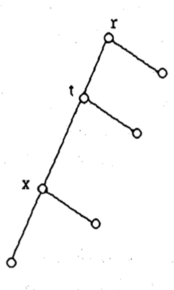
شكل (٦,٧٦)

لنفرض أن t ≤ r. الآن نأخذ عنصراً من { r, t } - A وليكن x. إذا كان r ≤ x فإننا نرسم الشكل (٦,٧٧)



شكل (٦,٧٧)

أما إذا كان $r \leq x$ فإننا نقارن x مع t . إذا كان $t \leq x$ فإننا نرسم الشكل (٦,٧٨)



شكل (٦,٧٨)

أما إذا كان $x \leq t$ فإننا نرسم الشكل (٦,٧٩)

شكل (٦,٧٩)

الآن نكرر هذه العملية على العناصر الباقية من A حيث نبدأ عملية المقارنة دائما من الجذر r. بما أن A مجموعة منتهية فإنه لابد لهذه العملية أن تتوقف بعد عدد منته من الخطوات فنحصل على شجرة ثنائية مرتبة T (A). تسمى T(A) شجرة تقص ثنائية للمجموعة A. إذا كانت $A \subseteq B$ وكانت $\leq$ علاقة ترتيب كلي على B أيضًا فإنه يمكن الحصول على T (B) بسهولة عن طريق تمديد T (A) كما يلي :

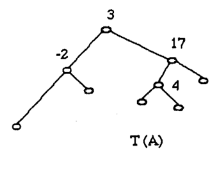
نأخذ $b \in B$ ونجري عملية المقارنة مبتدئين من r فنتبع فرعًا يقودنا إلى إضافة b إلى الشكل إذا كانت b لاتنتمي إلى ذلك الفرع .

مثال (٦,١٨)

لتكن $A = \{17, -2, 3, 4\}$. جد شجرة تقص ثنائية T (A) للمجموعة A ثم أضف 5- ثم أضف 1 إلى T (A) حيث $\leq$ هي علاقة الترتيب الكلي المعتاد على الأعداد .

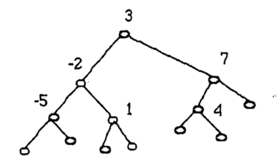
الحل

نختار 3 كجذر ثم نضيف 2- ثم نضيف 17 ثم نضيف 4 فنحصل على الشجرة في الشكل (٦,٨٠)



شكل (٦,٨٠)

الآن نضيف 5- ثم نضيف 1 فنحصل على الشجرة في الشكل (٦,٨١)



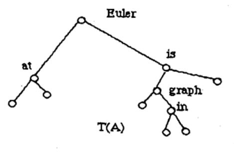
شكل (٦,٨١)

مثال (٦,١٩)

لتكن { Euler , graph , is , in , at } = A . جد شجرة تقص ثنائية T (A) للمجموعة A ثم أضف Ali ثم أضف computer إلى T (A) حيث ≤ هي علاقة الترتيب المعجمي على الكلمات.

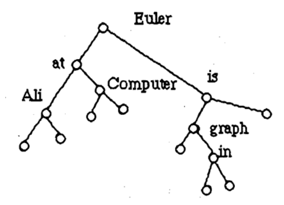
الحل

نختار Euler جذراً ثم نضيف is وat و graph و in على الترتيب فنحصل على الشجرة في الشكل (٦,٨٢).



شكل (٦,٨٢)

الآن نضيف Ali ثم نضيف Computer فنحصل على الشجرة (٦,٨٣)



شكل (٦,٨٣)

(٦,٦,٢) شيفرات هوفمان (Huffman codes)

لتكن Σ مجموعة منتهية غير خالية. نسمي Σ أبجدية ونسمي كل عنصر في Σ حرفًا (أو حرفًا أبجديًا). كل نسق منته من حروف Σ يسمى كلمة. فمثلاً إذا كانت Σ = { a, t , 4 } فإن كلا من a , aat , ataa4 , ttt , 4at4 كلمة حروفها مأخوذة من Σ. نسمي الكلمة التي لاتحتوي على حروف الكلمة الخالية ونرمز لها بالرمز θ. لتكن Σ^* هي مجموعة جميع الكلمات التي يمكن الحصول عليها بوساطة Σ. إذا كانت ω ∈Σ فإننا نعرف طول ω على أنه عدد الحروف التي تتكون منها ونرمز لهذا الطول بالرمز L(ω). فمثلا L (θ) = 0 , L (a) = 1 , L (aat) = 3. إذا كانت Σ={ 0 , 1} فإننا نسمي Σ^* مجموعة الكلمات الثنائية، وكما هو معروف فإن للكلمات الثنائية أهمية قصوى حيث إن الحواسيب تخزن المعلومات والبيانات على شكل كلمات ثنائية. إذا كانت C مجموعة منتهية من الحروف أو الرموز فإننا ننشىء تقابلا بين C ومجموعة

من الكلمات الثنائية، ونسمي هذه العملية تشفيراً للمجموعة C. فمثلا، إذا كانت $C = \{a, +, ?, 4\}$ وكانت M هي مجموعة الكلمات الثنائية $M = \{0, 10, 110, 101\}$ فإن تشفير C يمكن أن يتم بوساطة التقابل $f : C \longrightarrow M$ المعرف كما يلي $f(a) = 0$، $f(+) = 10$، $f(?) = 110$، $f(4) = 101$.

في معظم أنظمة التشفير (أو الشيفرة) المعروفة نجد أن أطوال الكلمات الثنائية المستعملة لتشفير الحروف متساوية، وفي هذه الحالة نقول إن نظام التشفير ذو طول ثابت. إن شيفرة هوفمان ليست ذات طول ثابت، وخلفية هذه الشيفرة أن تكرار الحروف التي يراد تشفيرها يختلف من حرف إلى آخر، وبالتالي، فإنه من الأفضل تشفير الحروف التي تكرارها مرتفع نسبيًا بكلمات ثنائية قصيرة. من ناحية أخرى فإن شيفرة هوفمان تحقق «خاصة الصدر» التالية: إذا كانت الكلمة الثنائية ω هي شيفرة الحرف x وكانت u هي شيفرة y فإن ω ليست صدراً للكلمة u (أي أن $u \neq \omega\,\omega'$ حيث ω' كلمة ثنائية) كما أن u ليست صدراً للكلمة ω. وبسبب هذه الخاصة لا يكون هناك أي غموض أو التباس عند فك الشيفرات.

تعريف (٦,١٨)

لتكن $C = \{x_1, \ldots, x_n\}$ مجموعة من الحروف ولتكن $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ هي دالة التكرار (أي أنه كلما كان عدد المرات الذي يظهر فيها x_i هو $f(x_i)$ فإن x_i يظهر $f(x_i)$ مرة). إذا كانت $\overline{x}_i, i = 1, \ldots, n$ هي شيفرة x_i في نظام معين للتشفير فإننا نعرف وزن هذا النظام على أنه العدد $W = f(x_1) L(\overline{x_1}) + \ldots + f(x_n) L(\overline{x_n})$. نسمي نظام التشفير أمثليًا بالنسبة إلى مجموعة من الأنظمة إذا كان وزنه أصغر من أو يساوي وزن أي نظام من هذه الأنظمة.

قبل أن نعطي الخوارزمية المتعلقة بإيجاد شيفرات هوفمان نود أن نذكر (بدون إثبات) أن شيفرة هوفمان أمثلية بالنسبة إلى الأنظمة ذوات الطول المتغير والتي تتمتع بخاصة الصدر.

خوارزمية (٦,٢)

لتكن C مجموعة من الحروف ولتكن $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ هي دالة التكرار.

(١) لكل $x \in C$ ارسم رأسًا وعَلِّمه بالعلامة $f(x)$ حيث تكون جميع الرؤوس على سطر واحد نسميه السطر الأساسي وبحيث تكون العلامات مرتبة تصاعديًا من اليسار إلى اليمين.

(٢) ابدأ من اليسار واجعل الرأس الأول تابعًا مباشرًا أيسرًا لرأس جديد واجعل الرأس الثاني تابعًا مباشرًا أيمنًا لهذا الرأس الجديد ثم علّم الرأس الجديد بمجموع علامتي الرأسين الأول والثاني ثم عدّل الرسم حيث يكون الرأس الجديد في السطر الأساسي.

(٣) عدِّل الرسم حيث تكون العلامات مرتبة تصاعديًا في السطر الأساسي.

(٤) كرر الخطوة (٢) والخطوة (٣) كلما أمكن ذلك. (لاحظ أن C مجموعة منتهية وبالتالي، فإن الخوارزمية تتوقف بعد عدد منته من الخطوات وذلك عندما يحتوي السطر الأساسي على رأس واحد فقط نسميه الجذر).

(٥) ارسم الشجرة الثنائية التي حصلت عليها في الخطوة (٤) بدون علامات ثم عَلِّم كل ضلع يربط رأسًا بتابعه المباشر الأيسر بالعلامة 0 وعلِّم كل ضلع يربط رأسًا بتابعه المباشر الأيمن بالعلامة 1

تسمى الشجرة التي نحصل عليها بوساطة الخوارزمية السابقة شجرة

هوفمان . لكل $x \in C$ فإن الرأس الذي يمثل x يكون ورقة في هذه الشجرة، ولإيجاد شيفرة x فإننا نكتب (من اليسار إلى اليمين) علامات الأضلاع التي نقابلها إذا انطلقنا من الجذر واتّبعنا الفرع الذي يربط الجذر بالورقة التي تمثل x .

مثال (٢-٠ ,٦)

لتكن $C = \{d, e, r, s, t\}$ ولتكن $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كما يلي :

$f(d) = 8 \;, f(e) = 7 \;, f(r) = 5 \;, f(s) = 24 \;, f(t) = 4$.

(أ) جد شجرة هوفمان ثم جد شيفرة هوفمان للمجموعة C .

(ب) جد وزن الشيفرة .

(جـ) شَفِّر الرسالة التالية : "desert" .

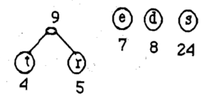
(د) فك الشيفرة التالية : 0010101000 .

الحل

(أ) (١) الخطوة الأولى :

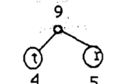
t r e d s
4 5 7 8 24

(٢) الخطوة الثانية :

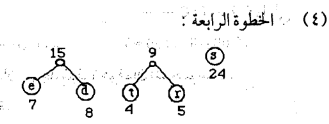




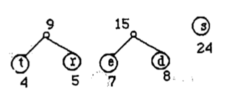
(٣) الخطوة الثالثة :



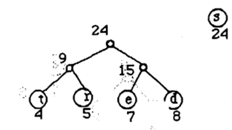
(٤) الخطوة الرابعة :



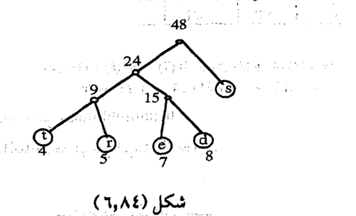
(٥) الخطوة الخامسة :



(٦) الخطوة السادسة :

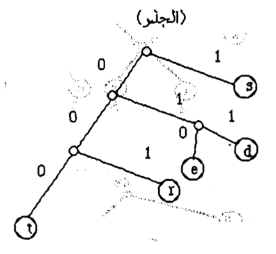


(٧) الخطوة السابعة :



شكل (٦,٨٤)

وبالتالي، فإن شجرة هوفمان هي :



شكل (٦,٨٥)

الآن، إذا رمزنا لشيفرة الحرف x بالرمز $\bar{x}$ فإن الجدول التالي يعطينا شيفرة هوفمان :

x	t	r	e	d	s
$\bar{x}$	000	001	010	011	1

(ب) إن وزن الشيفرة هو :

$$W = (3)(4) + (3)(5) + (3)(7) + (3)(8) + (1)(24)$$
$$= 12 + 15 + 21 + 24 + 24 = 96$$

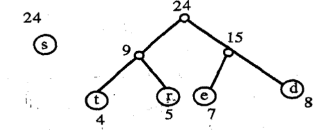
(جـ) إن شيفرة «desert» هي 0110101010001000 .

(د) بفك الشيفرة المعطاة نحصل على الرسالة " rest ".

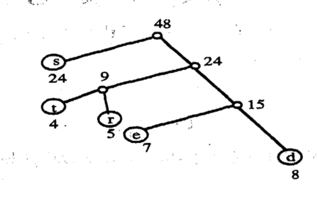
ملاحظات

(١) في المثال (٦,٢٠) يمكن الحصول على شيفرة أخرى وذلك بتعديل الخطويتين السادسة والسابعة كما يلي :

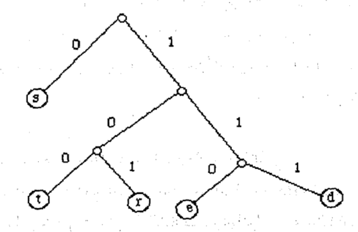
الخطوة السادسة :



الخطوة السابعة :



وبذلك تكون شجرة هوفمان هي :



شكل (٦,٨٦)

وبالتالي نحصل على الجدول التالي :

x	s	t	r	e	d
$\bar{x}$	0	100	101	110	111

واضح أن وزن الشيفرة الجديدة يساوي وزن الشيفرة الأخرى ولكن يحدث تعديل في تشفير الرسائل وفك الشيفرات . لذلك، نتفق على أن لانغيِّر ترتيب الرؤوس في السطر الأساسي إلاّ إذا كان ذلك ضروريا.

(٢) من الملاحظة (١) نستنتج أنه يمكن أحيانا الحصول على أكثر من حل لمسألة إيجاد شيفرة هوفمان وبالتالي فإن هذه الشيفرة ليست وحيدة بوجه عام.

(٦,٦,٣) الترميز البولندي (Polish notation)

لتكن $(T = (V, E) , r)$ شجرة ثنائية منتظمة مرتبة ذات جذر. إذا كان $x \in V$ فإننا نرمز بالرمز $T(x)$ للشجرة الجزئية ذات الجذر x، وإذا كان a هو التابع المباشر الأيسر للرأس x وكان b هو التابع المباشر الأيمن للرأس x فإننا نسمي $x\,T(a)\,T(b)$ المرافق الصدري للرأس x ونسمي $T(a)\,T(b)\,x$ المرافق العجزي للرأس x كما نسمي $T(a)\,x\,T(b)$ المرافق الداخلي للرأس x.

نقول إننا قد أجرينا تسلقا مباشرا للشجرة T إذا قمنا بما يلي :

(١) نكتب المرافق الصدري للجذر، ليكن هذا المرافق هو $r\,T(a)\,T(b)$.

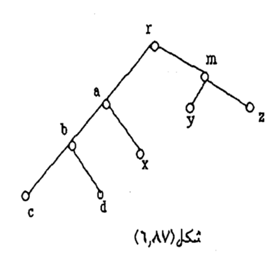
(٢) لكل رأس داخلي x نكتب المرافق الصدري للرأس x مكان $T(x)$، ولكل ورقة y نكتب y مكان $T(y)$.

(٣) نكرر الخطوة (٢) كلما أمكن ذلك.

نقول إننا قد أجرينا تسلقًا عكسيًا للشجرة T إذا استخدمنا المرافق العجزي بدلا من المرافق الصدري في (١) و (٢). كذلك نقول إننا قد أجرينا تسلقًا داخليًا للشجرة T إذا استخدمنا المرافق الداخلي بدلاً من المرافق الصدري في (١) و(٢).

مثال (٦,٢١)

لتكن (T , r) هي الشجرة في الشكل (٦,٨٧)



شكل(٦,٨٧)

(أ) أجر تسلقًا مباشرًا للشجرة T.

(ب) أجرِ تسلقًا عكسيًا للشجرة T.

(جـ) أجرِ تسلقًا داخليًا للشجرة T.

الحل

(أ) الخطوات التالية تزودنا بتسلق مباشر للشجرة T.

الخطوة الأولى :

r T(a) T (m)

الخطوة الثانية :

r a T (b) T (x) m T (y) T (z)

الخطوة الثالثة :

r a b T (c) T (d) x myz

الخطوة الرابعة :

r a b c d x m y z

(ب) الخطوات التالية تزودنا بتسلق عكسي للشجرة T .

الخطوة الأولى :

T (a) T (m)r

الخطوة الثانية :

T (b) T (x) a T (y) T (z) mr

الخطوة الثالثة :

T (c) T (d) b x a y z mr

الخطوة الرابعة :

c d bxayzmr

(جـ) الخطوات التالية تزودنا بتسلق داخلي للشجرة T .

الخطوة الأولى :

T (a) r T (m)

الخطوة الثانية :

T (b) a T (x) r T (y) m T (z)

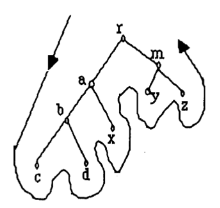
الخطوة الثالثة :

T (c) bT (d) a x rymz

الخطوة الرابعة :

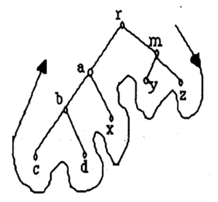
cbdaxrymz

نلاحظ أنه يمكن الحصول على النتيجة الأخيرة في (أ) عن طريق متابعة السهم الموجود في الشكل (٦,٨٨) .



شكل (٦,٨٨)

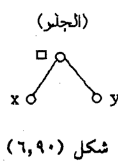
كذلك نلاحظ أنه يمكن الحصول على النتيجة الأخيرة في (ب) عن طريق متابعة السهم الموجود في الشكل (٦,٨٩) وكتابة الرؤوس من اليمين إلى اليسار :



شكل (٦,٨٩)

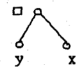
إذا كانت P عبارة حسابية فإنه يمكن تمثيل P بشجرة مرتبة حيث تمثل العمليات الثنائية بالرؤوس الداخلية وتمثل الثوابت والمتغيرات بالأوراق ، ونسميها شجرة العبارة

P. في مايلي نستخدم / للدلالة على القسمة. كما نستخدم * للدلالة على الضرب ونستخدم $a \uparrow b$ (أو a ** b) بدلاً من a^b. إذا كانت □ عملية ثنائية على مجموعة ما فإننا نمثل العبارة x □ y بالشجرة المرتبة التالية :



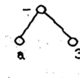
شكل (٦,٩٠)

إذا كانت □ إبدالية فإن x □ y = y □ x وبالتالي فإنه يمكن انشاء شجرة أخرى وهي



شكل (٦,٩١)

أما إذا كانت □ غير إبدالية فإن الشجرة المرتبة وحيدة. إن شجرة العبارة 3 -a هي :



شكل (٦,٩٢)

مثال (٦,٢٢)

جد شجرة العبارة $(a+b)^2 + (\frac{cd-e}{4})$

الحل

شكل (٦.٩٣)

إذا كانت T هي شجرة العبارة P فإن العبارة التي نحصل عليها عن طريق التسلق المباشر للشجرة T تسمى الترميز البولندي للعبارة P، أما العبارة التي نحصل عليها عن طريق التسلق العكسي للشجرة T فتسمى الترميز البولندي العكسي للعبارة P. كذلك، تسمى العبارة التي نحصل عليها عن طريق التسلق الداخلي للشجرة T

الترميز الداخلي للعبارة P. إن الترميز الداخلي غير صالح لحساب العبارات وذلك لأن الأقواس ضرورية لجلاء غموضه. أما أهمية كل من الترميز البولندي والترميز البولندي العكسي فإنها تعود إلى أن عدم وجود الأقواس لايؤدي إلى أي غموض في الحسابات.

مثال (٦,٢٣)

لتكن P هي العبارة المعطاة في المثال (٦,٢٢)

(أ) جد الترميز البولندي للعبارة P.

(ب) جد الترميز البولندي العكسي للعبارة P.

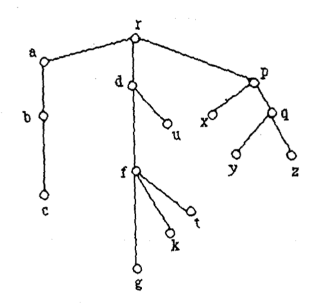
الحل

(أ) باستخدام شجرة العبارة P الموجودة في المثال (٦,٢٢) نجد أن:
.P = + ** + a b 2 / - * c d e 4

(ب) باستخدام شجرة العبارة P الموجودة في المثال (٦,٢٢) نجد أن:
.ab + 2 ** cd * e - 4 / +

تمارين (٦,٦)

(١) لتكن T = (V , E) هي الشجرة التالية:



شكل (٦,٩٤)

(أ) جد مجموعة الرؤوس الداخلية للشجرة T.

(ب) جد مجموعة الأوراق في T.

(جـ) أعط مثالا على فرع في T.

(د) جد ارتفاع T ومستوى كلٍ من الرؤوس d ، t ، b ، x.

(هـ) جد الشجرة الجزئية ذات الجذر d.

(و) جد تابعًا مباشراً للرأس p وجد تابعًا للرأس d.

(٢) أعط مثالا على شجرة ثنائية منتظمة ومثالا على شجرة ثنائية غير منتظمة.

(٣) لتكن $T = (V, E)$ شجرة ثنائية منتظمة بحيث $n = |V|$. أثبت أنه إذا كان m هو عدد الرؤوس الداخلية في T فإن $n = 2m + 1$ وأثبت أن عدد الأوراق في T يساوي $m + 1$.

(٤) لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة كليًا حيث $A = \{ out , of , the , sea , came , he \}$
وحيث $\leq$ هي علاقة الترتيب المعجمي على الكلمات .
(أ) جد شجرة تقصٍ ثنائية $T(A)$ للمجموعة A .
(ب) أضف sun ثم أضِف bright إلى $T(A)$.

(٥) حل التمرين (٤) من أجل
(أ) $A = \{ no , body , knows , where , the , wind , goes \}$. ثم أضف ship ثم أضف sea إلى $T(A)$.
(ب) $A = \{ all , people , are , created , free\}$. ثم أضف equal ثم أضف Omar إلى $T(A)$.

(٦) لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة كليًا حيث $A = \{-7, -3, 0, 5, 8\}$ وحيث $\leq$ هي علاقة الترتيب الكلي المعتاد على الأعداد .
(أ) جد شجرة تقصٍ ثنائية $T(A)$ للمجموعة A .
(ب) أضف 3 ثم أضِف 20- إلى $T(A)$.

(٧) حل التمرين (٦) من أجل
(أ) $A = \{ -3 , -1 , 1 , 2 , 5 , 6 \}$. ثم أضف 11 ثم أضف 15 إلى $T(A)$.
(ب) $A = \{ 3 , 5 , 7 , 9 \}$. ثم أضف 5- ثم أضف 6 ثم أضف 2 إلى $T(A)$.

(٨) لتكن $C = \{ A , S , L , I , M , U \}$ ولتكن $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كمايلي :

x	A	S	L	I	M	U
f(x)	32	7	9	25	5	4

(أ) جد شجرة هوفمان ثم جد شيفرة هوفمان للمجموعة C .
(ب) جد وزن الشيفرة ثم شفر الرسالة " SALAM ".
(جـ) فك الشيفرة " 10111101101010100111011 " .

(٩) لتكن { $C = \{ A , I , M , E , T \}$ ولتكن $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كما يلي :

x	A	I	M	E	T
f(x)	15	7	12	9	6

(أ) جد شجرة هوفمان ثم جد شيفرة هوفمان للمجموعة C .

(ب) جد وزن الشيفرة ثم شفر الرسالة " AIM " .

(جـ) فك الشيفرة " 1001010100 " .

(١٠) لتكن $C = \{ T , S , M , H , A \}$ ولتكن $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كما يلي :

x	T	S	M	H	A
f(x)	4	8	2	5	1

(أ) جد شجرة هوفمان ثم جد شيفرة هوفمان للمجموعة C .

(ب) جد وزن الشيفرة ثم شفر الرسالة " MATH " .

(جـ) فك الشيفرة "110111000111" .

(١١) جد شجرة هوفمان ثم جد شيفرة هوفمان من أجل

(أ)

x	M	O	N	S	U	V
f(x)	25	7	9	5	4	32

(ب)

x	a	n	c	d	e	p
f(x)	30	6	7	23	3	2

(جـ)

x	u	t	s	y	d
f(x)	11	10	4	30	5

(١٢) لكل عبارة من العبارات التالية، جد شجرة العبارة، الترميز البولندي، والترميز البولندي العكسي :

(أ) $P = (x^2 - 4y + 5z)\left[\frac{2x}{(z-x)^3} + \frac{3y}{(z+x)^2}\right]$.

(ب) $P = (x^3 - y)\left[xy + \frac{2 + y^3}{(x + y^5)}\right]$.

(جـ) $P = (x^3 - y + z)\left(\frac{x}{z-x} + \frac{y}{z^2 - y}\right)$.

(د) $P = (x + y^3)\left[\frac{3x}{y} + \frac{y}{(x-y)^2}\right]$.

(هـ) $P = (x+1)(x^2+1)(x^3 + x^2 + 1)$.

(ز) $P = (x+1)(x-1) - x^3 - x^4 + 5$.

(١٣) (أ) لتكن T شجرة ثنائية ذات ارتفاع h وعدد رؤوسها ذات الدرجة 1 هو k. أثبت أن $k \le 2^h$. [إرشاد : استخدم الاستقراء الرياضي على h]

(ب) أعط مثالا على شجرة ثنائية بحيث تصبح المتباينة في (أ) مساواة .

(١٤) هل توجد شجرة ذات جذر تحتوي على أربعة رؤوس داخلية وستة رؤوس ذات درجة 1 ؟

(١٥) هل توجد شجرة ثنائية منتظمة ذات عمق 3 وتحتوي على 9 من الرؤوس ذات درجة 1 ؟ .

(٦,٧) الرسوم المتماثلة
Isomorphic Graphs

ليكن G رسمًا . كما نعلم هناك تمثيلات متعددة للرسم G ، ولكن هذه التمثيلات لاتختلف في شيء جوهري حيث أنها تتمتع بالخواص الموجودة في G .

من ناحية أخرى، إذا كان G وH رسمين فقد تكون لهما نفس الخواص بالرغم من اختلافهما في أسماء الرؤوس والأضلاع. وللسهولة فإننا ستتعامل مع الرسوم البسيطة في دراستنا لتماثل الرسوم.

تعريف (٦,١٩)

ليكن $G = (V(G), E(G))$ و $H = (V(H), E(H))$ رسمين بسيطين، وليكن $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ تطبيقًا. نقول إن f تماثل من G إلى H إذا تحقق التالي :

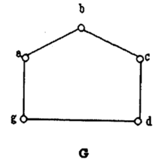
(أ) f تطبيق متباين وشامل،

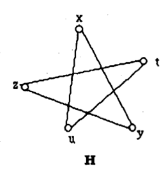
(ب) لكل $x, y \in V(G)$ فإن $\{x, y\} \in E(G)$ إذا وفقط إذا كان $\{f(x), f(y)\} \in E(H)$

في هذه الحالة نقول إن G وH متماثلان ونكتب $G \cong H$.

مثال (٦,٢٤)

بيّن ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا وعلل إجابتك :





شكل (٦,٩٥)

الحل

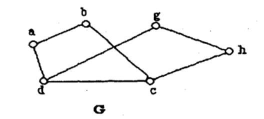
نعرف التطبيق $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ كما يلي :

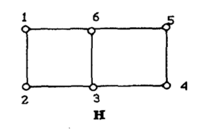
v	a	b	c	d	g
f (x)	x	y	z	t	u

يستطيع القارىء أن يرى بسهولة أن f تماثل من G إلى H وبالتالي، فإن $G \cong H$.

مثال (٦,٢٥)

بيّن ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا وعلل إجابتك





شكل (٦,٩٦)

الحل

نعرف التطبيق $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ كما يلي :

x	a	b	c	d	g	h
f(x)	2	1	6	3	4	5

واضح أن f تماثل من G إلى H وبالتالي فإن $G \cong H$.

تعريف (٦,٢٠)

لتكن P خاصة متعلقة بالرسوم. نقول إن P لا متغير تماثلي إذا تحقق الشرط التالي: لكل رسمين بسيطين G و H فإنه إذا كان $G \cong H$ وكان G يحقق الخاصة P فإن H يحقق الخاصة P.

بالاستناد إلى المبرهنة التالية نستطيع الحصول على بعض اللامتغيرات التماثلية، كما يمكن استخدام هذه المبرهنة لاكتشاف عدم التماثل بين الرسومات.

مبرهنة (٦,٢٣)

ليكن $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ تماثلاً من الرسم البسيط G إلى الرسم البسيط H. عندئذ:

(أ) $|V(G)| = |V(H)|$ و $|E(G)| = |E(H)|$،

(ب) $\deg f(x) = \deg x$، لكل $x \in V(G)$

(جـ) *عدد الرؤوس التي درجة كل منها m في G يساوي عدد الرؤوس التي درجة كل منها m في H.*

(د) *عدد الدورات التي طول كل منها r في G يساوي عدد الدورات التي طول كل منها r في H.*

(هـ) *G رسم مترابط إذا وفقط إذا كان H رسما مترابطا.*

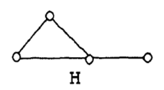
البرهان

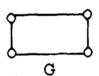
سنثبت (ب) فقط ونقبل الخواص الأخرى. ليكن $x \in V(G)$ و $\deg x = m$. بما أن $\deg x = m$ فإنه يوجد $x_1, \ldots, x_m \in V(G)$ بحيث $x_i \neq x_j$ لكل $i \neq j$ وبحيث x_i يجاور x لكل i. بما أن f تطبيق متباين ويحفظ التجاور فإن $f(x_1), \ldots, f(x_m) \in V(H)$ رؤوس مختلفة وكل منها يجاور $f(x)$. إذن $\deg f(x) \geq m$. بما أن f تطبيق شامل

ويحفظ عدم التجاور فإن الرؤوس المجاورة للرأس $f(x)$ في H هي $f(x_1), \ldots, f(x_m)$ فقط. إذن $\deg f(x) = m$. Δ

مثال (٦,٢٦)

بيّن ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا وعلل إجابتك :





شكل (٦,٩٧)

الحل

G لايماثل H، أي $G \not\cong H$ وذلك لأن H يحتوي على دورة طولها 3 بينما G لايحتوي على دورة طولها 3.

ملاحظات

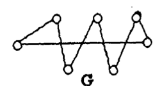
(١) لتكن A هي مجموعة الرسومات البسيطة. لتكن T هي العلاقة المعرفة على A كما يلي : لكل $G, H \in A$ فإن GTH إذا وفقط إذا كان $G \cong H$. يستطيع القارىء أن يثبت بسهولة أن T علاقة تكافؤ على A.

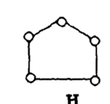
(٢) إن اللامتغيرات التماثلية كثيرة، وإن إيجاد خواص مشتركة بين رسمين بسيطين G وH لايكفي لإثبات أنهما متماثلان، ولذلك فإن مسألة التماثل هي من المسائل الصعبة في نظرية الرسومات.

تمارين (٦,٧)

في التمارين من ١ إلى ١٠ بيّن ما إذا كان الرسمان المعطيان متماثلين أم لا وعلل إجابتك .

(١)

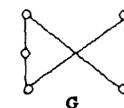




H

شكل (٦,٩٨)

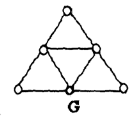
(٢)

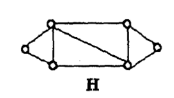


H

شكل (٦,٩٩)

(٣)

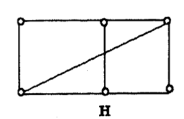




شكل (٦,١٠٠)

(٤)

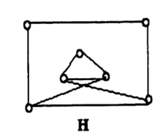
G



شكل (٦,١٠١)

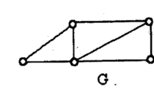
(٥)

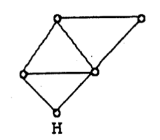
G



شكل (٦,١٠٢)

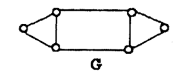
(٦)

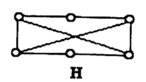




شكل (٦,١٠٣)

(٧)

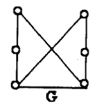


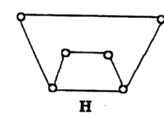


شكل (٦,١٠٤)



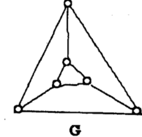
(٨)

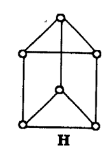




شكل (٦,١٠٥)

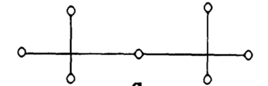
(٩)

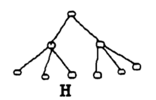




شكل (٦,١٠٦)

(١٠)





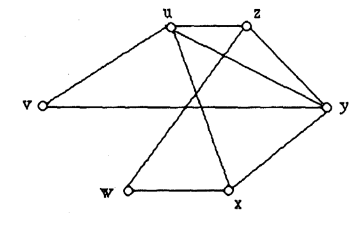
شكل (٦,١٠٧)

(١١) جد جميع الرسومات ثنائية التجزئية غير المتماثلة وعدد رؤوسها 5 .

(١٢) جد جميع الأشجار غير المتماثلة التي عدد رؤوسها 5 .

(١٣) جد جميع الأشجار غير المتماثلة التي عدد رؤوسها 6 .

(١٥) جد جميع الأشجار غير المتماثلة المولدة للرسم المعطى بالشكل (٦,١٠٨) .



شكل (٦,١٠٨)

(١٦) جد جميع الرسومات البسيطة غير المتماثلة التي عدد رؤوسها 3 .

(١٧) جد جميع الرسومات البسيطة غير المتماثلة التي عدد رؤوسها 4 .

(١٨) إذا كان $n \neq m$ فأثبت أن $K_m \not\cong K_n$.

(١٩) ليكن G_1 و G_2 رسمين بسيطين . أثبت أن : $G_1 \cong G_2$ إذا وفقط إذا كان $G_1^c \cong G_2^c$.

(٢٠) نقول عن رسم بسيط G إنه متمم لنفسه إذا كان $G^c \cong G$.

(أ) أعط مثالاً على رسم بسيط بحيث يكون عدد رؤوسه 4 ومتمماً لنفسه .

(ب) أثبت أنه إذا كان $G = (V, E)$ رسماً بسيطاً متمماً لنفسه فإنه يوجد عدد صحيح k حيث $|V| = 4k$ أو $|V| = 4k+1$

(٢١) لتكن A هي مجموعة الرسومات البسيطة . لتكن T هي العلاقة المعرفة على A كما يلي : $G\,T\,H$ إذا وفقط إذا كان $G \cong H$ لكل $G, H \in A$ أثبت أن T علاقة تكافؤ على A وجد فصول التكافؤ .

(٦,٨) الرسوم المستوية

Planar Graphs

في البنود السابقة من هذا الفصل ، لم نفرق بين الرسم وتمثيلاته المختلفة ، كذلك ، طابقنا كل رأس مع النقطة (أو الدائرة الصغيرة) التي تمثله وطابقنا كل ضلع مع قطعة الخط التي تمثله ، كما طابقنا كل ضلع مع صورته . حتى الآن ، لم يظهر أي خلاف جوهري بين التمثيلات المختلفة للرسم . ولقد تمكنا من الحصول على المعلومات التي كانت تهمنا عن طريق استخدام أي تمثيل للرسم . من ناحية أخرى ، هناك حالات تظهر فيها فوارق مهمة بين التمثيلات . فمثلا ، إذا كان الرسم المدروس نموذجًا رياضيًا لدارة كهربائية حيث إن الأضلاع تمثل الأسلاك والرؤوس تمثل نقاط

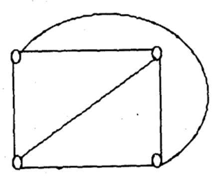
الاتصال لهذه الأسلاك، فإننا نحاول الحصول على تمثيل للرسم حيث لاتتقاطع الأضلاع إلاّ عند نقاط الاتصال. إن هذا ممكن دائمًا في الفضاء ولكنه غير ممكن في المستوى إلا إذا تحققت شروط معينة.

تعريف (٦,٢١)

ليكن G رسمًا. نقول إن G رسم مستوٍ إذا كان يوجد تمثيل للرسم G في المستوى حيث تتقاطع الأضلاع (إذا تقاطعت) عند الرؤوس فقط. في هذه الحالة نقول إن التمثيل هو تمثيل مستوٍ.

مثال (٦,٢٧)

إن K_4 رسم مستو لأن التمثيل في الشكل (٦,١٠٩) هو تمثيل مستوٍ له:

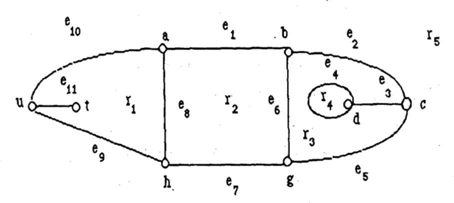


شكل (٦,١٠٩)

إذا كان لدينا في المستوى خط مضلع مغلق بسيط (أي لايتقاطع مع نفسه) فإننا سنقبل بداهةً أن هذا الخط المغلق يقسم المستوى إلى منطقتين إحداهما تتكون من

النقاط التي تقع داخل الخط المغلق، وهي منطقة محدودة (أي يمكن رسم دائرة بحيث تكون المنطقة داخل تلك الدائرة)، والأخرى تتكون من النقاط التي تقع خارج الخط المغلق وهي منطقة غير محدودة. إن أي نقطتين في المنطقة الداخلية يمكن أن نصل بينهما بخط لايقطع الخط المغلق. كذلك، فإن المنطقة الخارجية تحقق هذه الخاصة. أما إذا أردنا أن نصل نقطة في إحدى المنطقتين مع نقطة في المنطقة الأخرى بوساطة خط فإن هذا الخط لابد وأن يقطع الخط المغلق. وبالتالي، فإن الخط المغلق هو حدود للمنطقتين. في الحقيقة، إن الحديث عن الخطوط المغلقة والمناطق هو موضوع مبرهنة جوردان (C . Jordan) الخاصة بالمنحنيات ولكننا لن نتعرض لذلك هنا بشكل رياضي دقيق.

لنفرض أن G رسم مترابط مستو معطى بالشكل (٦,١١٠)



شكل (٦,١١٠)

واضح أن G يقسم المستوى إلى مناطق منفصلة. جميع هذه المناطق محدود إلاّ المنطقة r_5 فهي غير محدودة. حدود المنطقة r_2 هي الدورة :

$a\, e_1\, b\, e_6\, g\, e_7\, h\, e_8\, a$ بينما حدود المنطقة r_1 هي المسار المغلق :

$u\, e_{10}\, a\, e_8\, h\, e_9\, u\, e_{11}\, t\, e_{11}\, u$. كذلك، إن حدود المنطقة r_4 هو الدورة : $d\, e_4\, d$

بينما حدود المنطقة r_3 هي المسار المغلق : $b\ e_2\ c\ e_3\ d\ e_4\ d\ e_3 c\ e_5 g\ e_6\ b$ لاحظ أن الضلع يحد منطقتين إذا كان محتوى في دورة وأنه يحد منطقة واحدة إذا كان غير محتوى في دورة (أي جسر في الرسم).

في مايلي، سوف نسمي المنطقة وجهًا ونرمز لها بالرمز f ، وإذا كان G رسمًا مترابطًا مستويًا وكان e جسرًا في G فإننا نقبل أن عدد وجوه G - e يساوي عدد وجوه G، بينما إذا كان e ليس جسرًا في G فإن عدد وجوه G - e يقل بواحد عن عدد وجوه G . سوف نستخدم الرموز v(G) ، e(G) و f(G) للدلالة على عدد رؤوس G، عدد أضلاع G وعدد وجوه G على الترتيب.

مبرهنة (٦,٢٤) (صيغة أويلر).

إذا كان G رسمًا مترابطًا مستويًا فإن $v(G) - e(G) + f(G) = 2$.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الوجوه n. ليكن G رسمًا مترابطًا مستويًا حيث n=1. عندئذ، إن حذف أي ضلع من G لايقلل عدد الوجوه وبالتالي فإن كل ضلع في G جسر في G. إذن، G لايحتوي على دورات وبالتالي فإن G شجرة. بالاستناد إلى المبرهنة (٦,١٥)، نجد أن $e(G) = v(G)-1$ وبالتالي، فإن :

$$v(G) - e(G) + f(G) = v(G) - v(G) + 1 + 1 = 2$$

وهذا هو المطلوب. الآن نفرض أن المطلوب صحيح لكل رسم مترابط مستو عدد وجوهه k حيث $k \geq 1$ عدد صحيح. ليكن G رسمًا مترابطًا مستويًا عدد وجوهه k+1 . بما أن $f(G) \geq 2$ فإن G يحتوي على دورة. ليكن e هو أحد أضلاع هذه الدورة. عندئذ، إن G - e رسم مترابط مستوٍ عدد وجوهه k. بالاستناد إلى فرض الاستقراء، نجد أن :

$$v(G-e) - e(G-e) + f(G-e) = 2$$

ولكن $v(G) = v(G-e)$

و $e(G) = e(G-e) + 1$

و $f(G) = f(G-e) + 1$.

إذن :

$$v(G)-e(G)+f(G) = v(G-e)-e(G-e)-1+f(G-e)+1=2$$

وهذا هو المطلوب . Δ

من الجدير بالذكر أن صيغة أويلر تتعلق بالرسوم المترابطة ، وإذا كان G رسمًا مستويًا عدد مركباته $k(G)$ فإن القارىء يجد بسهولة أن :

$$v(G) - e(G) + f(G) = k(G) + 1$$

مبرهنة (٦,٢٥)

إذا كان G رسمًا بسيطًا مترابطًا مستويًا بحيث $v(G) \geq 3$ فإن :

$$e(G) \leq 3\, v(G) - 6$$

البرهان

بما أن G مترابط و $v(G) \geq 3$ فإن $e(G) \geq 2$. إذا كـــان $e(G) = 2$ فـإن $2<3(3)-6=3$ وبالتالي ، فإن العلاقة متحققة . الآن ، نفرض أن $e(G) \geq 3$. ضع $A = \{(x,y) : y$ وجه و x ضلع يحد $y\}$. عندئذ ، بما أن كل ضلع يحد وجهين على على الأكثر فإن $|A| \leq 2e(G)$. وبما أن كل وجه يحده ثلاثة أضلاع على الأقل فإن $|A| \geq 3f(G)$.

إذن :

$$3f(G) \leq 2e(G)$$

باستخدام صيغة أويلر ، نجد أن

$$v(G)-e(G)+f(G)=2$$

إذن

$$3\,[2-v(G)+e(G)] = 3\,f(G) \le 2\,e(G)$$

وبالتالي، فإن :

$$e(G) \le 3\,v(G) - 6 \quad . \quad \Delta$$

نتيجة

K_5 رسم غير مستوٍ.

البرهان

نفرض أن K_5 رسم مستوٍ. نعلم أن $v(K_5) = 5$ و $e(K_5) = 10$. بما أن K_5 بسيط ومترابط ومستوٍ فإننا بالاستناد إلى المبرهنة (٦,٢٥) نجد أن $10 \le 3(5) - 6 = 9$ وهذا تناقض. Δ

مبرهنة (٦,٢٦)

إذا كان $G = (V,E)$ رسمًا بسيطًا مترابطًا بحيث إن $v(G) \ge 3$ ولا يحتوي على مثلثات فإن

$$e(G) \le 2\,v(G) - 4$$

البرهان

بما أن G مترابط $v(G) \ge 3$ فإن $e(G) \ge 2$. إذا كان $e(G) = 2$ فإن $2 \le 2(3) - 4 = 2$ وبالتالي فإن العبارة محققة. نفرض الآن أن $e(G) \ge 3$. إذا كان G شجرة فإن العلاقة متحققة. ضع $A = \{(x,y) : y$ ضلع يحد x وجه و $y\}$.
بما أن كل ضلع يحد وجهين على الأكثر فإن $|A| \le 2\,e(G)$. وبما أن G لا يحتوي مثلثات فإن كل وجه يحده أربعة أضلاع على الأقل ومن ثم فإن $|A| \ge 4\,f(G)$.

إذن، $\quad 4\,f(G) \le 2\,e(G)$

ولكن باستخدام صيغة أويلر لدينا $f(G) = 2 - v(G) + e(G)$

إذن، $\quad 4\,[2 - v(G) + E(G)] \le 2\,e(G)$

وبالتالي، فإن :

$e(G) \leq 2\,v(G) - 4$. Δ

نتيجة

$K_{3,3}$ غير مستوٍ.

البرهان

نفرض أن $K_{3,3}$ رسم مستوٍ. نعلم أن $v(K_{3,3}) = 6$ و $e(K_{3,3}) = 9$. وبما أن $K_{3,3}$ رسم بسيط مترابط ولايحتوي على مثلثات فإننا نجد باستخدام المبرهنة (٦،٢٦)، أن $9 \leq 2(6) - 4 = 8$

وهذا مستحيل. إذن، $K_{3,3}$ غير مستوٍ. Δ

مبرهنة (٦،٢٧)

إذا كان G رسمًا بسيطًا مترابطًا مستويًا فإنه يوجد في G رأس x بحيث $\deg x \leq 5$.

البرهان

إذا كان $v(G) < 3$ فإن المطلوب صحيح. لذلك نفرض أن $v(G) \geq 3$.

بالاستناد إلى المبرهنة (٦،٢٥)، نجد أن $e(G) \leq 3\,v(G) - 6$. نفرض أن مجموعة رؤوس G هي $V = \{x_1 , \dots , x_n\}$ ونفرض أن $\deg y \geq 6$ لكل $y \in V$. من المبرهنة (٦،١)، نجد أن :

$$\deg x_1 + \dots + \deg x_n = 2\,e(G)$$

إذن، $2\,e(G) = \deg x_1 + \dots + \deg x_n \geq 6 + \dots + 6 = 6n$. وبالتالي، فإن $e(G) \geq 3n$. إذن $3n \leq 3n - 6$ وبالتالي، فإن $0 \leq -6$. وهذا تناقض. Δ

في ختام هذا البند، نريد أن نعطي تمييزًا للرسوم المستوية ولكننا سوف نحذف البرهان لأنه لايقع ضمن نطاق هذا الكتاب.

تعريف (٦,٢٢)

(أ) ليكن $G = (V, E)$ رسمًا بسيطًا . نسمي كلا من العمليتين التاليتين تحويلا ابتدائيًا على G :

(i) إذا كان $x \in V$ حيث $\deg x = 2$ وكان $\{x, y\}, \{x, z\} \in E$ فإننا نحذف الرأس x وهذين الضلعين ثم نضيف الضلع $\{y, z\}$.

(ii) إذا كان $\{y, z\} \in E$ فإننا نحذفه ونضيف رأسًا x كما نضيف الضلعين $\{x, z\}$ و $\{x, y\}$.

(ب) نقول إن الرسم البسيط G يكافىء الرسم البسيط H إذا كان يمكن الحصول على H عن طريق إجراء عدد منته من العمليات الابتدائية على G .

تزودنا المبرهنة التالية بميزان لاختبار ما إذا كان الرسم مستويًا وسنقدمها بدون برهان .

مبرهنة (٦,٢٨)

ليكن G رسما . عندئذ ، G رسم مستو إذا وفقط إذا كان G لا يحتوي على رسم جزئي مكافىء للرسم K_5 أو للرسم $K_{3,3}$.

تمارين (٦,٨)

(١) ليكن $G = (V, E)$ رسمًا مترابطًا ومستويًا حيث $|V| = 10$ و $|E| = 20$. جد عدد أوجه G .

(٢) ليكن G رسمًا مترابطًا ومستويًا ودرجات رؤوسه هي : $2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 6$. جد عدد أوجه G .

(٣) ليكن G رسمًا بسيطًا مترابطًامستويًا ومنتظمًا من النوع 5 ، ويحتوي على 20 وجه . جد عدد رؤوس G .

(٤) إذا كان G رسمًا بسيطًا يحتوي على 4 رؤوس فبرهن أن G يجب أن يكون رسمًا مستويًا .

(٥) ليكن $G = (V, E)$ رسمًا بسيطًا ، $|V| = 5$ حيث تكون درجة أحد رؤوسه تساوي 2 . أثبت أن G مستو .

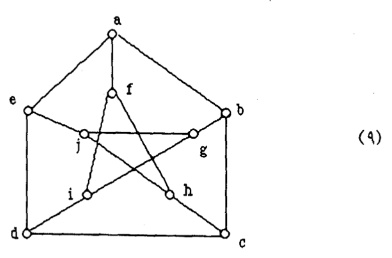
(٦) هل $K_{3,4}$ مستو ؟ لماذا ؟

(٧) إذا كان $G = (V, E)$ رسمًا بسيطًا مترابطًا مستويًا ، $|V| < 12$ فأثبت أنه يوجد رأس x بحيث $\deg x \leq 4$.

(٨) إذا كان $G \cong H$ و G مستويًا فأثبت أن H مستويًا .

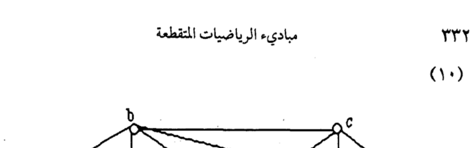
في كل التمارين من ٩ إلى ١٣ بين ما إذا كان الرسم المعطى مستويًا مع تعليل إجابتك .

(٩)



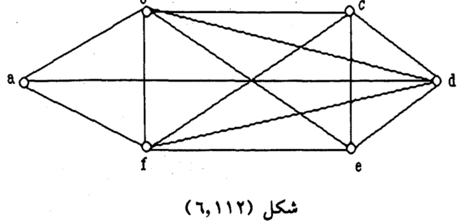
شكل (٦,١١١)

(١٠)



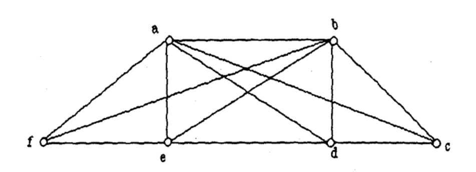
شكل (٦,١١٢)

(١١)



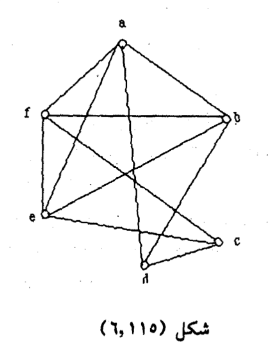
شكل (٦,١١٣)

(١٢)



شكل (٦,١١٤)

(١٣)



شكل (٦,١١٥)

(١٤) ليكن $G = (V,E)$ رسمًا بسيطًا حيث $|V| \geq 11$. أثبت أن G غير مستوٍ أو G^c غير مستوٍ .

(١٥) إذا كانت T شجرة فأثبت أن T رسم مستوٍ .

(١٦) إذا كان G رسمًا مستويًا يحتوي على e ضلعًا ، v رأسًا ، f وجهًا و k مركبة فأثبت أن $v-e+f = k+1$.

(٦,٩) الرسوم الأويلرية والهاملتونية
Eulerian And Hamiltonian Graphs

تُعَدُّ مسألة البحث عن مسار ذي مواصفات معينة في الرسم من المسائل الشائعة في نظرية الرسومات . ومن الناحية التاريخية ، فقد بدأ أويلر دراسة هذه المسائل عندما قام بحل مسألة الجسور السبعة والتي تبعها تعريف ودراسة الرسوم الأويلرية .

تعريف (٦,٢٣)

(أ) *لتكن C دارة في الرسم G . نقول إن C دارة أويلرية في G إذا كانت تحتوي على جميع رؤوس وجميع أضلاع G . نقول إن G رسم أويلري إذا كان G يحتوي على دارة أويلرية .*

(ب) *لتكن T طريقا في الرسم G . نقول إن T طريق أويلرية في G إذا كانت تحتوي على جميع رؤوس وجميع أضلاع G . نقول إن G رسم نصف أويلري إذا كان G يحتوي على طريق أويلرية .*

هناك أكثر من تمييز للرسوم الأويلرية، كذلك، هناك أكثر من خوارزمية لإيجاد الدارات الأويلرية. ولتفادي الإطالة عند كتابة البراهين فإننا سنبدأ بإعطاء المبرهنات التالية والتي سوف نستخدمها في ما بعد.

مبرهنة (٦,٢٩)

ليكن $G = (V, E)$ رسمًا مترابطًا ولتكن $x = x_1, e_1, x_2, \ldots, e_{n-1}, x_n = x$ دارة في G. ليكن $H = (V, E - \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\})$. وليكن $G' = (V', E - \{e_1, \ldots, e_{n-1}\})$ حيث $V' = \{v \in V : H$ في v غير منعزل في$\}$. عندئذ، إذا كانت $V' \neq \phi$ فإن $V' \cap \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \phi$.

البرهان

ليكن $a \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ و $b \in V$. بما أن G رسم مترابط فإنه يوجد ممر $a = y_1, c_1, y_2, \ldots, c_{m-1}, y_m = b$ من a إلى b في G. ليكن $1 \le r \le m$ هو أكبر عدد صحيح حيث $y_r \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. إذا كان $r = m$ فإن $b = y_m \in V' \cap \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. أما إذا كان $r < m$ فإننا نستنتج من تعريف r أن $y_r \in \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ و $y_{r+1} \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ وبالتالي، فإن $c_r \notin \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$. إذن c_r ضلع في G' وبالتالي فإن $y_r \in V'$. إذن $y_r \in V' \cap \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Δ

مبرهنة (٦,٣٠)

إذا كان $G = (V, E)$ رسمًا وكانت جميع رؤوسه زوجية فإن G لا يحتوي على جسور.

البرهان

ليكن $e = \{x, y\} \in E$ ولتكن $C_1 = (V_1, E_1), \dots, C_r = (V_r, E_r)$ هي جميع مركبات G. إذن، يوجد $1 \le m \le r$ حيث $e \in E_m$. واضح أن C_m رسم مترابط وأن جميع رؤوسه زوجية ودرجة كل منها أكبر من أو تساوي 2. ننشىء دارة من x إلى x بحيث تحتوي على e كما يلي: ضع $x = x_1, \quad e = e_1, y = x_2$ لتحصل على الطريق x_1, e_1, x_2. بما أن $\deg x_2 \ge 2$ فإنه يوجد z حيث $\{x_2, z\} \in E_m - \{e\}$. ضع $z = x_3$ و $e_2 = \{x_2, x_3\}$ لتحصل على الطريق x_1, e_1, x_2, e_2, x_3. الآن، نكرر هذه العملية على x_3 لنحصل على الطريق $x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, x_4$.

بما أن G رسم منته فإن تكرار هذه العملية لابد له من التوقف بعد عدد منته من الخطوات، لذلك نفرض أننا حصلنا على الطريق $x_1, e_1, \dots, x_n$ بعد التوقف. نلاحظ أنه بسبب التوقف فإن $\deg x_n = 0$ في الرسم $H = (V_m, E_m - \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\})$. واضح أن كل رأس في المتتالية $e_1, x_2, \dots, e_{n-1}$ يلتقي عددًا زوجيًا موجبًا من المرات مع الأضلاع الموجودة في هذه المتتالية، وبالتالي فإنه إذا كان $x_1 \ne x_n$ فإن x_n رأس فردي في C_m. بما أن x_n زوجي في C_m فإن $x_1 = x_n$ وبالتالي فإن $x_1, e_1, \dots, x_n$ دارة تحقق المطلوب وبالتالي توجد دورة تحتوي على e (أثبت ذلك). بالاستناد إلى المبرهنة (٦,٨)، نجد أن e ليس جسرًا في G. ∆

المبرهنة التالية تعطينا تمييزًا للرسوم الأويلرية كما أن برهانها يتضمن خوارزمية لايجاد الدارات الأويلرية.

مبرهنة (٦,٣١)

$G = (V, E)$ رسم أويلري إذا وفقط إذا كان G مترابطًا وكانت جميع رؤوسه زوجية.

البرهان

ليكن G أويلريًا. إذن توجد دارة $x = x_1 , e_1 , x_2, \ldots, e_{n-1} , x_n = x$ تحتوي على جميع أضلاع G. واضح أن G مترابط وأن كل رأس في المتتالية $e_1 , x_2 , \ldots , e_{n-1}$ يلتقي عددًا زوجيًا موجبًا من المرات مع الأضلاع الموجودة في هذه المتتالية، كما أن الرأس $x = x_1 = x_n$ يلتقي بالضلعين e_1 و e_{n-1}. إذن، جميع رؤوس G زوجية.

الآن، نفرض أن G مترابط وأن جميع رؤوسه زوجية. ننشىء دارة أويلرية في G متبعين الخطوات التالية:

(١) نختار $x \in V$ ثم نضع $x = x_1$. بما أن $\deg x \geq 2$ فإنه يوجد $e = \{x ,y\} \in E$. ضع $y = x_2$ و $e = e_1$. بالاستناد إلى المبرهنة (٦,٣٠)، فإن G لايحتوي على جسور وبالتالي فإننا نستطيع أن ننشىء دارة $x = x_1 , e_1 , x_2 , \ldots , e_{n-1} , x_n = x$ من x إلى x كما في إثبات المبرهنة (٦,٣٠).

(٢) إذا كانت $x_1 , e_1 , \ldots , x_n$ دارة أويلرية في G فإننا نتوقف. أما إذا كانت هذه الدارة غير أويلرية فإننا نرمز بالرمز $G_1 = (V_1 , E_1)$ للرسم الذي نحصل عليه من G بوساطة حذف أضلاع هذه الدارة وحذف الرؤوس التي تصبح منعزلة بعد حذف هذه الأضلاع. واضح أن جميع الرؤوس في G_1 زوجية كما أننا بالاستناد إلى المبرهنة (٦,٢٩) نجد أن $V_1 \cap \{x_1 , \ldots , x_n\}$ ليست خالية.

ليكن $x_j \in V_1 \cap \{x_1 , x_2 , \dots x_n\}$. بالاستناد إلى المبرهنة (٦,٣٠) نستطيع أن ننشيء دارة $x_j = y_1 , c_1 , y_2 , \dots , c_{m-1}$ و $y_m = x_j$ من x_j إلى x_j في G_1 ، ثم نضيفها إلى الدارة الأولى لنحصل على الدارة :

$$x = x_1 , e_1 , \dots , x_j = y_1 , c_1 , \dots , c_{m-1} , y_m = x_j , e_j , \dots , e_{n-1} , x_n = x$$

(٣) نكرر الخطوة (٢) على الدارة الأخيرة التي حصلنا عليها في الخطوة (٢). بما أن G رسم منته فإن عملية التكرار لابد لها من التوقف بعد عدد منته من الخطوات ، وبالتالي ، فإننا نحصل على دارة أويلرية في G . Δ

مبرهنة (٦,٣٢)

ليكن $G = (V, E)$ رسمًا ، عندئذ ، إن G رسم نصف أويلري إذا وفقط إذا كان G مترابطًا ويحتوي على رأسين فرديين فقط .

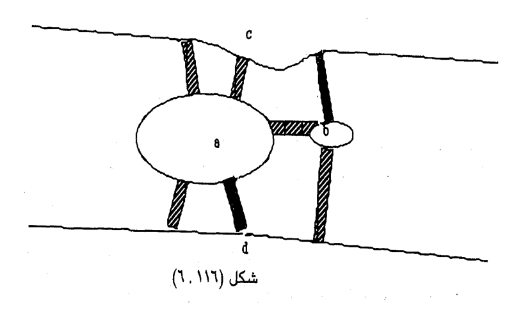
البرهان

ليكن G نصف أويلري . عندئذ ، توجد طريق أويلرية $x = x_1 , e_1 , \dots , x_n = y$ في G . واضح أن G مترابط وأن كلا من x و y رأس فردي بينما الرؤوس الأخرى $x_2 , x_3 , \dots , x_{n-1}$ رؤوس زوجية .

الآن، نفرض أن $G = (V, E)$ مترابط ويحتوي على رأسين فرديين a و b فقط . نضيف ضلعًا جديدًا $e = \{a, b\}$ إلى G فنحصل على رسم جديد $H = (V, E^+)$ حيث $E' = E \cup \{e\}$. واضح أن H رسم مترابط وأن جميع رؤوس H زوجية . بالاستناد إلى المبرهنة (٦,٣١) ، نجد أن H رسم أويلري . إذن توجد دارة أويلرية C في H ، الآن نحذف e من C فنحصل على طريق أويلرية T في G وبالتالي ، فإن G رسم نصف أويلري . Δ .

مثال (٦,٢٨) (مسألة الجسور السبعة)

مدينة تقع على نهر وتنتشر أحياؤها على ضفتي النهر وعلى جزيرتين تقعان في النهر. تتصل أجزاء هذه المدينة بوساطة سبعة جسور كما هو موضح في الشكل (٦,١١٦) :

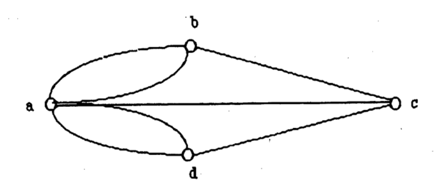


شكل (٦,١١٦)

هل يوجد مكان في هذه المدينة حيث ننطلق منه ثم نعبر كلا من الجسور السبعة مرة واحدة ثم نعود إلى ذلك المكان ؟

الحل

الرسم في الشكل (٦,١١٧) يمثل نموذجًا رياضيًا لهذه المدينة :

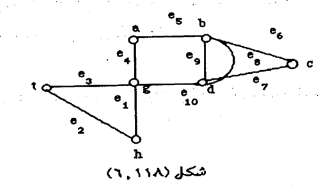


شكل (١١٧, ٦)

وبالتـــالي ، فـــإن الســـؤال هو : هل هذا الرسم أويلري ؟ واضح أن الرسم يحتـوي على رؤوس فـردية ، إذن ، الرسم غـيـر أويلري . (لاحظ أنه غـيـر نصف أويلري أيضًا) .

مثال (٢٩ , ٦)

استخدم الخوارزمية المذكورة في إثبات المبرهنة (٦,٣١) لإيجاد دارة أويلرية في الرسم المعطى بالشكل (٦,١١٨) .



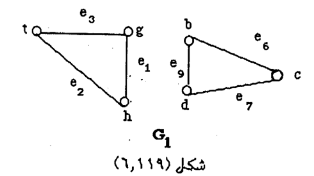
شكل (٦,١١٨)

الحل

نختار أية دارة (أو دورة) . نختار الدورة A :

$a\, e_5\, b\, e_8 d\, e_{10}\, g\, e_4 a$.

نحذف أضلاع هذه الدورة كما نحذف الرؤوس التي تصبح منعزلة بعد حذف هذه الأضلاع فنحصل على الرسم G_1 :



شكل (٦,١١٩)

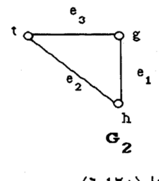
الآن ، نختار رأسًا مشتركًا للدورة A والرسم G_1 . نختار الرأس b ونحصل على الدورة B:

$b\, e_6\, c\, e_7\, d\, e_9 b$

بإضافة B إلى A ، نحصل على الدارة D:

$a\, e_5\, b\, e_6 c\, e_7 d\, e_9\, b\, e_8 d\, e_{10}\, g\, e_4\, a$

بتكرار الحذف ، نحصل على الرسم G_2 :



شكل (٦,١٢٠)

نختار الرأس المشترك g ونحصل على الدورة F :

$$g\, e_1\, h\, e_2\, t\, e_3\, g$$

بإضافة F إلى D ، نحصل على الدارة الأويلرية :

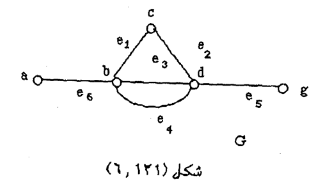
$$a\ e_5\ b\, e_6\ c\, e_7\ d\, e_9\ b\, e_8 d\, e_{10} g\, e_1 h\, e_2\ t\, e_3 g\, e_4\ a$$

ملاحظة

إذا كـان الرسم G نصف أويلري فـإنه بعـد إضـافـة ضلع يصل بين الرأسين الفـرديين نحـصل على رسم أويـلري . ويمكن اسـتـخـدام الخـوارزمـيـة السـابقـة للحـصـول على دارة أويلرية ثم نحذف الضلع المضـاف فنحصل على طريق أويلرية في الرسم G . كـذلك ، من الممكن اسـتـخـدام الخوارزميـة للحـصـول على طريق أويلرية بأن نبدأ بطريق من رأس فـردي إلى الرأس الفـردي الآخـر ثـم نكمل كـمـا في الخوارزمية .

مثال (٦,٣٠)

جد طريقًا أويلرية في الرسم المعطى بالشكل (٦,١٢١)



شكل (٦,١٢١)

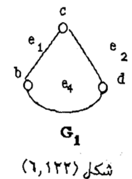
الحل

نختار طريقًا (أو ممرًا) من الرأس الفردي a إلى الرأس الفردي g.

نختار الممر A :

$$a\, e_6\, b\, e_3\, d\, e_5\, g$$

بعد الحذف ، نحصل على الرسم G_1 :



شكل (٦,١٢٢)

نختار الرأس المشترك b ونحصل على الدارة B :

$be_1ce_2de_4b$

بإضافة B إلى A ، نحصل على الطريق الأويلري :

. $a e_6 b e_1 c e_2 d e_4 b e_3 d e_5 g$

في ما يلي نقدم خوارزمية جيدة لإيجاد الدارات الأويلرية .

خوارزمية (٦,٣) (فلوري Fleury)

ليكن $G = (V, E)$ رسمًا أويلريًا . للحصول على دارة أويلرية في G نفذ الخطوات التالية :

(١) اختر أي رأس $x_0 \in V$ وضع $T_0 = x_0$.

(٢) نفرض أننا قد أنشأنا الطريق $T_j = x_0 e_1 x_1 e_2 \ldots e_j x_j$. اختر ضلعًا e_{j+1} من $E - \{e_1, e_2, \ldots, e_j\}$ حيث :

(أ) e_{j+1} ساقط على x_j .

(ب) e_{j+1} ليس جسرًا في الرسم $G_j = G - \{e_1, \ldots, e_j\}$ إلا إذا لم يكن هناك خيار آخر .

ضع $T_{j+1} = x_0 e_1 x_1 e_2 \ldots e_j x_j e_{j+1} x_{j+1}$ حيث $e_{j+1} = \{x_j, x_{j+1}\}$.

(٣) توقف عندما لا تستطيع تكرار الخطوة (٢) .

مبرهنة (٦,٣٣)

إذا كان $G = (V, E)$ رسمًا أويلريًا فإن كل طريق مُنشأة بوساطة خوارزمية فلوري هي دارة أويلرية في G .

البرهان

لتكن $T_n = x_0 e_1 x_1 \ldots e_n x_n$ طريقًا في G مُنشأة بوساطة خوارزمية فلوري . واضح أن $\deg x_n = 0$ في الرسم G_n . إذن $x_0 = x_n$ وبالتالي فإن T_n دارة في G . لنفرض أن T_n لا تحتوي على جميع أضلاع G . لتكن $S = \{x \in V : \deg x$ في $G_n > 0\}$ و $\overline{S} = V - S$. واضح أن $S \neq \phi$ ، وبالاستناد إلى المبرهنة (٦,٢٩) ، نجد أن $S \cap \{x_0 , x_1 , \ldots , x_n\} \neq \phi$. واضح أن $x_n \in \overline{S}$. ليكن $0 < m < n$ هو أكبر عدد صحيح بحيث $x_m \in S$ و $x_{m+1} \in \overline{S}$. لتكن :

$A = \{e \in E :$ e يصل بين رأس من $\overline{S}$ ورأس من S$\}$.

من تعريف $\overline{S}$ ، ينتج أن $A \cap (E - \{e_1 , \ldots, e_m , \ldots , e_n\}) = \phi$ وبالتالي فإن $A \cap (E - \{e_1 , \ldots , e_m\}) \subseteq \{e_{m+1} , \ldots , e_n\}$. إذن ، بالاستناد إلى تعريف m نجد أن $A \cap (E - \{e_1 , \ldots , e_m\}) = \{e_{m+1}\}$ وبالتالي فإن e_{m+1} جسر في G_m . بما أن $x_m \in S$ فإن $\deg x_m > 0$ في G_n . إذن ، يوجد ضلع e ساقط على x_m حيث $e \neq e_m$ و $e \neq e_{m+1}$. بما أن e_{m+1} جسر في G_m فإننا بالاستناد إلى الخطوة (٢) في الخوارزمية نجد أن e جسر في G_m . ليكن $G_m[S]$ هو الرسم المحدث بوساطة S في G_m وليكن $G_n[S]$ هو الرسم المحدث بوساطة S في G_n . واضح أن G_n رسم جزئي من G_m وبالتالي فإن $G_n[S]$ رسم جزئي من $G_m[S]$. بما أن e جسر في G_m فإن e جسر في $G_m[S]$ وبالتالي فإن e جسر في $G_n[S]$. من ناحية أخرى ، بما أن e_{m+1} جسر في G_m وبما أن $0 < m < n$ هو أكبر عدد صحيح بحيث $x_m \in S$ فإن $G_m[S] = G_n[S]$. ولكن لكل $x \in S$ فإن $\deg x$ في $G_n[S]$ تساوي $\deg x$ في G_n . إذن ، جميع رؤوس الرسم $G_n[S]$ زوجية . باستخدام المبرهنة (٦,٣٠) ، نجد أن $G_n[S]$ لا يحتوي على جسور . إن هذا تناقض . Δ

مثال (٦,٣١)

استخدم خوارزمية فلوري لإيجاد دارة أو يلرية في الرسم G المعطى في المثال (٦,٢٩) .

الحل

نختار الرأس t والضلع e_3 ونكوّن الطريق $t e_3 g$. الأضلاع e_1 ، e_4 و e_{10} ساقطة على g والضلع e_1 جسر في $G - e_3$. لذلك ، يمكن اختيار e_4 أو e_{10} . نختار e_{10} ونكون الطريق $t e_3 g e_{10} d$. نختار e_7 ونكون الطريق $te_3 ge_{10} de_7 c$. الآن ، نكون الطريق $t e_3 g e_{10} d e_7 c e_6 b$ وذلك لأن e_6 هو الضلع الوحيد الساقط على c في الرسم $G - \{e_3 , e_{10}, e_7\}$. الأضلاع e_5 ، e_8 و e_9 ساقطة على b والضلع e_5 جسر في $G- \{e_3 , e_{10}, e_7 , e_6\}$ لذلك نستطيع اختيار e_8 أو e_9 . نختار e_8 ونكون الطريق $t e_3 g e_{10} d e_7 c e_6 b e_8 d$. الآن نجد أنه لابد من إضافة الأضلاع e_9 ، e_5 ، e_4 ، e_1 و e_2 على الترتيب . لذلك نحصل على الدارة الأويلرية التالية :

$$t e_3 g e_{10} d e_7 c e_6 b e_8 d e_9 b e_5 a e_4 g e_1 h e_2 t.$$

ملاحظة

إذا كان $G = (V , E)$ رسمًا نصف أويلري فإنه يمكن استخدام خوارزمية فلوري لإيجاد الطريق الأويلرية على شرط أن نبدأ برأس فردي .

ننتقل الآن إلى نوع آخر مهم من الرسوم .

تعريف (٦,٢٤)

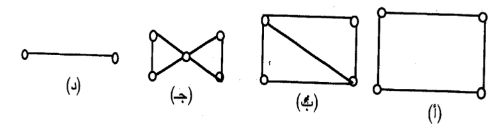
إذا كان G رسمًا وكانت C دورة في G فإن C تسمى دورة هاملتونية إذا كانت تحتوي على جميع رؤوس G . يسمى G هاملتونيًا إذا كان G يحتوي على دورة

هاملتونية . بالمثل، إذا كان P ممرًا في G فإن P يسمى ممرًا هاملتونيًا إذا كان يحتوي على جميع رؤوس G . يسمى G رسمًا نصف هاملتوني إذا كان يحتوي على ممر هاملتوني .

من الجدير بالذكر أن تمييز الرسوم الهاملتونية يُعَدُّ من المسائل الصعبة في نظرية الرسومات كما أنه حتى الآن لا توجد خوارزمية جيدة لإيجاد الدورات الهاملتونية ، وسنقدم هنا دون برهان شرطًا كافيًا ولكن غير لازم لتمييز الرسومات الهاملتونية .

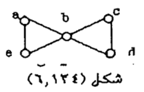
ملاحظات

(١) إن مفهومي الرسومات الأويلرية والرسومات الهاملتونية منفصلان تمامًا . فعلى سبيل المثال، في الشكل (٦,١٢٣) . الرسم (أ) أويلري وهاملتوني ، الرسم (ب) هاملتوني ولكنه ليس أويلريًا ، الرسم (جـ)أويلري ولكنه ليس هاملتونيًا والرسم (د) ليس أويلريًا ولا هاملتونيًا .



شكل (٦,١٢٣)

(٢) من الواضح أن الرسم الهاملتوني يجب أن يكون نصف هاملتوني ولكن العكس غير صحيح . فعلى سبيل المثال ، الرسم المعطى في الشكل (٦,١٢٤) نصف هاملتوني ولكنه ليس هاملتونيًا .



شكل (٦,١٢٤)

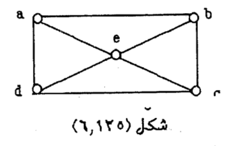
تقدم المبرهنة التالية دون برهان

مبرهنة (٦,٣٤)

إذا كان $G = (V, E)$ رسمًا بسيطًا ، $|V| = n \geq 3$ حيث $deg\, x + deg\, y \geq n$ لكل $x, y \in V$ ، $x \neq y$ ، $\{x, y\} \notin E$ فإن G هاملتوني .

مثال (٦,٣٢)

الرسم المعطى في الشكل (٦,١٢٥) يحقق شروط المبرهنة (٦,٣٤) وبالتالي ، فإنه هاملتوني .



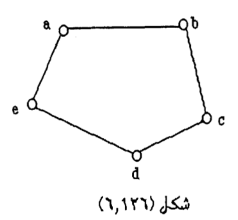
شكل (٦,١٢٥)

ومن السهل أن نرى أن ebadce هي دورة هاملتونية .

المثال التالي يوضح لنا أن الشرط المعطى في المبرهنة (٦,٣٤) ليس بالضرورة لازمًا .

مثال (٦,٣٣)

الرسم المعطى في الشكل (٦,١٢٦) هاملتوني



شكل (٦,١٢٦)

ومن السهل أن نرى أن $\deg x + \deg y = 4$ لكل x,y ، $x \neq y$ و $\{x , y\} \notin E$.

نتيجة (١)

إذا كان $G = (V , E)$ رسمًا بسيطًا $|V| = n \geq 3$ حيث $\deg x \geq \frac{n}{2}$ لكل $x \in V$

فإن G رسم هاملتوني .

البرهان

لتكن $x, y \in V$ و $\{x , y\} \notin E$. نلاحظ أن :

$$\deg x + \deg y \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \geq n .$$

وباستخدام مبرهنة (٦,٣٤) ، نجد أن G هاملتوني . Δ

مثال (٦,٣٤)

$K_{3,3}$ هاملتوني

الحل

$K_{3,3}$ يحتوي على 6 رؤوس و $\deg x = 3$ لكل رأس x .

نتيجة (٢)

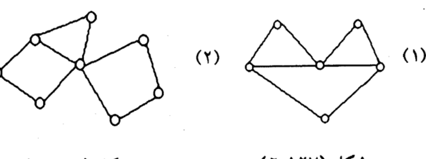
ليكن $G = (V, E)$ رسمًا بسيطًا ، $|V| = n \geq 3$ حيث $\deg x + \deg y \geq n-1$ لكل $x, y \in V$ ، $x \neq y$ ، $\{x, y\} \notin E$ عندئذ ، G نصف هاملتوني .

البرهان

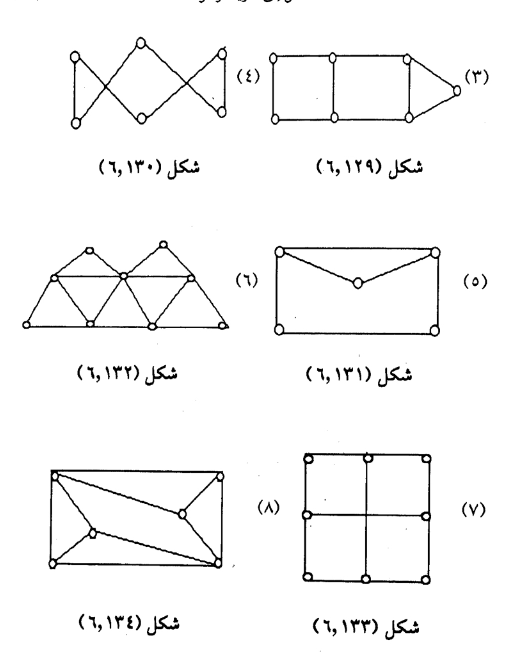
ننشيء الرسم $G' = (V', E')$ كما يلي : نضيف رأسًا جديدًا x_0 مجاوراً لكل رأس من الرؤوس التي في G . عندئذ $G' = (V', E')$ يحقق المبرهنة (٦,٣٤). G' هاملتوني وبالتالي ، فإن G نصف هاملتوني . Δ

تمارين (٦,٩)

في التمارين من ١ إلى ١٢ بين ما إذا كان الرسم المعطى أويلريًا أو نصف أويلري أم لا وعلل إجابتك . إذا كان الرسم أويلريًا فجد دارة أويلرية فيه وإذا كان نصف أويلري فجد طريقًا أويلرية فيه :



شكل (٦,١٢٧)   شكل (٦,١٢٨)



شكل (٦,١٢٩)

شكل (٦,١٣٠)

شكل (٦,١٣١)

شكل (٦,١٣٢)

شكل (٦,١٣٣)

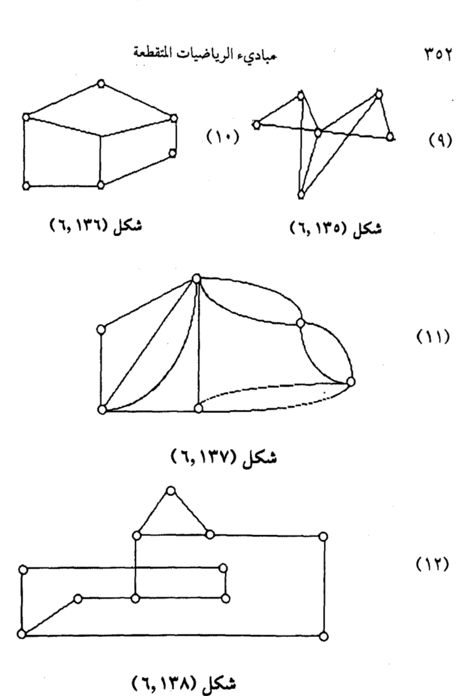
شكل (٦,١٣٤)

(٩)

(١٠)

(١١)

(١٢)



شكل (٦, ١٣٥)

شكل (٦, ١٣٦)

شكل (٦, ١٣٧)

شكل (٦, ١٣٨)

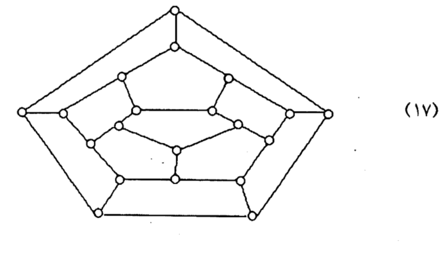
(١٣) هل K_n أويلري ؟ لماذا ؟

(١٤) هل $K_{n,m}$ أويلري ؟ لماذا ؟

(١٥) هل K_n هاملتوني ؟ لماذا ؟ (١٦) هل $K_{n,m}$ هاملتوني ؟ لماذا ؟

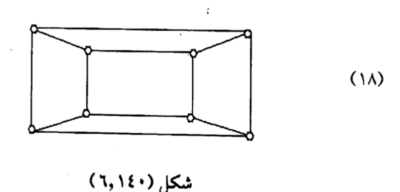
بين ما إذا كانت الرسوم المعطاة في التمارين من ١٧ إلى ٢٠ هاملتونية أو نصف هاملتونية مع تعليل الإجابة .

(١٧)



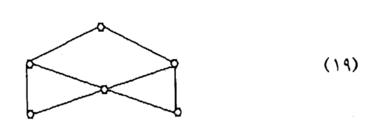
شكل (٦,١٣٩)

(١٨)



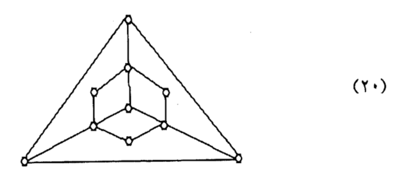
شكل (٦,١٤٠)

(١٩)



شكل (٦,١٤١)

(٢٠)



شكل (٦,١٤٢)

الفصل السابع

العـــــد
COUNTING

في هذا الفـصل، سنقـدم بعض المبادىء الأسـاسـية في نظرية التـركيبـات. إن معالجة مسألة ما ضمن نظرية التركيبات تتطلب التعامل مع الأسئلة التالية: هل يوجد حل للمسألة؟ ماهو عدد حلول المسألة؟ كيف نختار من مجموعة حلول المسألة حلا أمثليًا بالنسبة إلى خاصة معينة؟ لذلك، فإننا سنقدم مبدأ برج الحمام وبعض طرق العد التي تساعدنا على معرفة عدد عناصر مجموعة منتهية وكبيرة نسبيًا من غير أن نكتب عناصرها في قائمة مفصلة.

(٧,١) مبادىء العد
Counting Principles

إذا كانت A مجموعة منتهية فإننا سنستخدم الرمز $|A|$ أو الرمز $n(A)$ للدلالة على عدد عناصر A.

مبرهنة (٧,١) (مبدأ الجمع)

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات منتهية حيث $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$ فإن :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

يمكن إثبات المبرهنة (٧,١) بوساطة الاستقراء الرياضي على n ، ونترك هذا الإثبات كتمرين للقارىء . Δ

مبرهنة (٧,٢)

إذا كانت A , B , C مجموعات منتهية فإن

(أ) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

(ب) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

البرهان

(أ) بما أن $A \cup B = A \cup (B - A)$ و $A \cap (B-A) = \phi$ فإن $|A \cup B| = |A| + |B - A|$. كذلك ، بما أن $B = (A \cap B) \cup (B-A)$ و $(A \cap B) \cap (B-A) = \phi$ فإن $|B| = |A \cap B| + |B-A|$.

إذن :

$$|A \cup B| = |A| + (|B| - |A \cap B|) = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

(ب) بالاستناد إلى (أ)، نجد أن :

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)|$$

$$= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$

$$= |A| + (|B| + |C| - |B \cap C|) - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |B\cap C| - (|A\cap B| + |A\cap C| - |(A\cap B)\cap(A\cap C)|)$$

$$\Delta \quad = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

مبرهنة (٧,٣) (مبدأ الضرب)

إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعات منتهية فإن:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n|$$

حيث $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$.

يمكن اثبات المبرهنة (٧,٣) بوساطة الاستقراء الرياضي على n، ونترك هذا الاثبات كتمرين للقارىء. وغالبًا مانستخدم الصياغة التالية لمبدأ الضرب عندما نعالج المسائل:

إذا كان إنجاز المهمة A يتطلب إنجاز متتالية من المهمات $A_1, A_2, \dots, A_k$، وإذا كان عدد طرق إنجاز المهمة A_j لايعتمد على الكيفية التي أُنجزت بها المهمات $A_1, A_2, \dots, A_{j-1}$ لكل عدد صحيح $2 \le j \le k$، وإذا كان عدد طرق إنجاز A_j هو n_j لكل $1 \le j \le k$، فإن عدد طرق إنجاز المهمة A هو $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$.

في مايلي سنعطي بعض الأمثلة حيث نستخدم المبادىء السابقة في الحل.

مثال (٧,١)

يدرس 50 طالبًا في أحد المعاهد. 32 طالبًا يدرسون اللغة الإنجليزية، 18 يدرسون الألمانية و 26 طالبًا يدرسون الفرنسية. هناك تسعة طلاب يدرسون الإنجليزية والألمانية، ثمانية طلاب يدرسون الألمانية والفرنسية و16 طالبًا يدرسون

الإنجليزية والفرنسية، كما أن هناك 47 طالبًا يدرس كل منهم إحدى هذه اللغات على الأقل.

(أ) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإنجليزية والفرنسية والألمانية؟

(ب) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإنجليزية والألمانية فقط؟

(جـ) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإنجليزية فقط؟

الحل

(أ) لتكن E هي مجموعة الطلاب الذين يدرسون الإنجليزية و G هي مجموعة الطلاب الذين يدرسون الألمانية و F مجموعة الطلاب الذين يدرسون الفرنسية. نعلم أن:

$$|E \cup F \cup G| = |E| + |F| + |G| - |E \cap F| - |E \cap G| - |F \cap G| + |E \cap F \cap G|.$$

وبالتالي، فإن:

$$47 = 32 + 26 + 18 - 16 - 9 - 8 + |E \cap F \cap G|.$$

إذن $|E \cap F \cap G| = 4$.

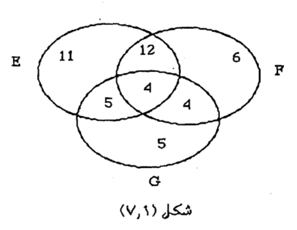
(ب) $9 - 4 = 5$.

(جـ) عدد الطلاب الذين يدرسون الإنجليزية والفرنسية فقط هو $16 - 4 = 12$.

وبالتالي فإن عدد الطلاب الذين يدرسون الإنجليزية فقط هو:

$$32 - (4 + 5 + 12) = 11$$

ويمكن توضيح الحل السابق بوساطة شكل ڤن التالي:



شكل (٧,١)

مثال (٧,٢)

لتكن Σ أبجدية حيث $m = |\Sigma|$. جد $|\Sigma_n|$ حيث Σ_n هي مجموعة الكلمات التي طول كل منها n والتي حروفها مأخوذة من Σ.

الحل

إن عدد طرق اختيار الحرف الأول في الكلمة هو m، كذلك، إن عدد طرق اختيار الحرف الثاني هو m، ...، وعدد طرق اختيار الحرف الأخير هو m. إذن، بالاستناد إلى مبدأ الضرب نجد أن: $|\Sigma_n| = m^n$.

مثال (٧,٣)

كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه حيث يكون مجموع رقميه عدد فردي؟

الحل

ليكن y هو رقم الآحاد و x هو رقم العشرات. نبدأ باختيار x. يمكن اختيار x

من المجموعة { 9 , ... , 2 , 1 } وبالتالي، فإن عدد طرق اختيار x هو 9. إذا كان x فرديًا فإنه يمكن اختيار y من المجموعة { 8 , 6 , 4 , 2 , 0 } ، أما إذا كان x زوجيًا فإنه يمكن اختيار y من المجموعة { 9 , 7 , 5 , 3 , 1 } وبالتالي، فإن عدد طرق اختيار y بعد اختيار x هو 5. إذن ، إن عدد الأعداد المطلوبة هو 45 = (5) (9).

مثال (٧,٤)

لتكن $A = \{a_1 , a_2 , ... , a_m\}$ ولتكن $B = \{b_1 , b_2 , ... , b_n\}$. جد عدد التطبيقات من A إلى B.

الحل

إذا أردنا أن نعرف تطبيقًا من A إلى B فإن صورة a_1 تحت تأثير التطبيق يمكن أن تكون أي عنصر في B وبالتالي فإن عدد طرق اختيار صورة a_1 هو n. بالمثل، إن عدد طرق اختيار صورة a_2 هو n ، . . . ، وإن عدد طرق اختيار صورة a_m هو n. إذن، إن عدد التطبيقات من A إلى B هو n^m.

مثال (٧,٥)

يعمل في مستشفى 4 أطبّاء، 7 ممرضين و3 فنيين. بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مؤلف من طبيب وممرض وفنّي؟

الحل

يمكن اختيار الطبيب بأربع طرق ويمكن اختيار الممرض بسبع طرق ويمكن اختيار الفني بثلاث طرق. إذن، عدد الطرق الممكنة هو 84 = (3) (7) (4).

تمارين (٧,١)

(١) يعمل في شركة 8 مهندسين، 3 فنيين و 24 عاملا. بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مكون من مهندس وفنّي وعامل؟

(٢) في إحدى المدن تتكون أرقام الهاتف من سبعة أرقام بحيث يختلف الرقم الأول من اليسار عن الصفر.

(أ) ما عدد أرقام الهاتف؟

(ب) ما عدد أرقام الهاتف التي لا تحتوي على الرقم 5؟

(جـ) ما عدد أرقام الهاتف التي لا تحتوي على الرقم 5 ولا تحتوي على الرقم 8؟

(٣) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه بحيث إن مجموع رقميه عدد زوجي؟

(٤) يوجد في السوق سبعة أنواع من الحواسيب وأربعة أنواع من الطابعات المتوافقة معها. بكم طريقة تستطيع اختيار حاسوب وطابعة؟

(٥) لتكن $\Sigma = \{0, 1\}$. ما عدد البَايتات (أي الكلمات التي طول كل منها 8) التي تحتوي على الحرف 1 مرتين على الأقل؟

(٦) إذا كان $|A| = n$ فأثبت أن عدد المجموعات الجزئية من A هو 2^n.

(٧) إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات منتهية حيث $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$ فاستخدم الاستقراء الرياضي على n لإثبات أن:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

(٨) إذا كانت $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ و $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ فأثبت أن:

(أ) $A \times B = (\{a_1\} \times B) \cup (\{a_2\} \times B) \cup \ldots \cup (\{a_m\} \times B)$

(ب) $|A \times B| = mn$.

(٩) إذا كانت $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ مجموعات منتهية فاستخدم الاستقراء الرياضي على n لإثبات أن :

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n| .$$

(١٠) جمعية ثقافية تضم 70 عضواً ، يقرأ 34 عضواً الصحيفة A ويقرأ 27 عضواً الصحيفة B ويقرأ 23 عضواً الصحيفة C . يقرأ 54 عضواً الصحيفتين A و B ويقرأ 50 عضواً الصحيفتين A و C ويقرأ 41 عضواً الصحيفتين B و C ، كما أن 64 عضواً يقرأ كل منهم إحدى الصحف A , B,C على الأقل .

(أ) ما عدد الأعضاء الذين لا يقرأون أية صحيفة؟

(ب) ما عدد الأعضاء الذين يقرأون جميع الصحف؟

(جـ) ما عدد الأعضاء الذين يقرأون الصحيفتين A وB فقط؟

(د) ما عدد الأعضاء الذين يقرأون الصحيفة A فقط؟ .

(٧,٢) التباديل
Permutations

تعريف (٧,١)

إذا كانت A مجموعة حيث $|A| = n$ وكانت B مجموعة جزئية من A بحيث $|B| = k$ وبحيث B مرتبة كليًا فإننا نسمي B بديلا من السعة k في A . إذا كان $k = n$ فإننا نسمي B تبديلا للمجموعة A . نستخدم الرمز $P(n,k)$ للدلالة على عدد جميع التباديل من السعة k في A .

فيما يلي سنستخدم الكتابة من اليسار إلى اليمين للدلالة على الترتيب . فمثلاً، إذا كانت $A = \{a , b , c, d\}$ فإننا سنستخدم الرمز bac للدلالة على التبديل الذي سعته 3 في A وحيث b هو العنصر الأول، a هو العنصر الثاني و c هو العنصر

الثالث في التبديل . وبالتالي ، إذا نظرنا إلى A على أنها أبجدية فإننا نستطيع أن ننظر إلى تبديل من السعة k في A على أنه كلمة طولها k مكونة من حروف غير مكررة مأخوذة من A .

مبرهنة (٧,٤)

إذا كان n , k عددين صحيحين حيث $1 \leq k \leq n$ فإن

$$P(n, k) = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

البرهان

لتكن A مجموعة حيث $|A| = n$. إذا أردنا أن ننشىء تبديلا من السعة k في A فإن عدد طرق اختيار العنصر الأول هو n ، ومهما كان اختيارنا للعنصر الأول فإن عدد طرق اختيار العنصر الثاني هو $n-1$، . . . ، ومهما كان اختيارنا للعناصر التي تسبق العنصر الأخير فإن عدد طرق اختيار العنصر الأخير هو $n - (k-1) = n-k+1$. إذن ، بالإستناد إلى مبدأ الضرب للعد نجد أن عدد طرق إنشاء التبديل هو :

$$n(n-1) \dots (n-k+1)$$

إذن ،

$$P(n,k) = n(n-1) \dots (n-k+1).$$

بما أن

$$n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)[(n-k)!]}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

فإن

$$P(n,k) = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad \Delta$$

ملاحظة

من المبرهنة (٧,٤)، ينتج أن $P(n,n) = n!$ وبالتالي، فإنه إذا كانت A مجموعة بحيث $|A| = n$ فإن عدد تباديل A هو $n!$.

مثال (٧,٦)

نريد ترتيب 4 كتب مختلفة في الرياضيات، 3 كتب مختلفة في الفيزياء و5 كتب مختلفة في الكيمياء على أحد الرفوف.

(أ) بكم طريقة يمكن ترتيب جميع الكتب؟

(ب) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا أردنا أن نضع مجموعة كتب الفيزياء على يمين مجموعة كتب الرياضيات وأن نضع مجموعة كتب الكيمياء على يمين مجموعة كتب الفيزياء؟

(جـ) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا أردنا أن نجعل كتب كل موضوع على حدة؟

الحل

(أ) بما أن عدد الكتب هو $4 + 3 + 5 = 12$ فإن عدد الطرق الممكنة هو $(12)!$.

(ب) عدد طرق ترتيب كتب الرياضيات هو $4!$ وعدد طرق ترتيب كتب الفيزياء هو $3!$ وعدد طرق ترتيب كتب الكيمياء هو $5!$. بالاستناد إلى مبدأ الضرب للعد نجد أن عدد الطرق الممكنة هو $(4!) . (3!) . (5!)$.

(جـ) عدد تباديل المجموعة { رياضيات، فيزياء، كيمياء } هو $3!$. إذن، باستخدام الفقرة (ب) نجد أن عدد الطرق هو $(3!) . (4!) . (3!) . (5!)$.

مثال (٧,٧)

يريد مدير شركة أن يقابل خمسة أشخاص قبل الظهر وأربعة أشخاص آخرين بعد الظهر. بكم طريقة يمكنه أن يجدول المقابلات إذا كان يريد أن يقابل كل شخص على حدة؟

الحل

بما أن عدد الأشخاص الذين سيقابلهم المدير قبل الظهر هو 5 فإن عدد طرق جدولة المقابلات لهذه الفترة هو $5!$. بالمثل، إن عدد طرق جدولة المقابلات لفترة مابعد الظهر هو $4!$. إذن، عدد الطرق الممكنة هو $(4!) . (5!)$.

مثال (٧,٨)

لتكن $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. نريد أن ننشىء متتالية بحيث تكون حدودها مختلفة ومأخوذة من A وبحيث يكون عدد حدود المتتالية 10 .

(أ) بكم طريقة يمكن إنشاء المتتالية إذا كانت حدودها الخمسة الأولى فردية؟

(ب) بكم طريقة يمكن إنشاء المتتالية إذا كانت حدودها تتناوب على النحو التالي: فردي، زوجي، فردي، . . . ؟

الحل

(أ) نلاحظ أن $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ مؤلفة من جميع الأعداد الفردية المنتمية إلى A كما أن $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ مؤلفة من جميع الأعداد الزوجية المنتمية إلى A. بما أن $|B| = 5$ فإن عدد طرق اختيار الحدود الخمسة الأولى هو $5!$. بالمثل إن عدد طرق اختيار الحدود الخمسة الأخيرة هو $5!$. إذن عدد الطرق الممكنة لانشاء المتتالية هو $(5!)^2 = (5!) . (5!)$.

(ب) بما أن عدد حدود المتتالية 10، وبما أن المتتالية متناوبة فإن عدد الأعداد الفردية

بين حدودها هو 5. كذلك إن عدد الأعداد الزوجية بين حدود المتتالية هو 5.
إذن، عدد الطرق الممكنة لانشاء المتتالية هو $(5!)(5!) = (5!)^2$.

مثال (٧,٩)

لتكن $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ هي الأبجدية الإنجليزية ولتكن $\{0, 1, \ldots, 9\}$ هي مجموعة الأرقام العشرية. في إحدى الدول، تتكون لوحات السيارات من حرفين يتبعهما ثلاثة أرقام.

(أ) ما عدد اللوحات؟

(ب) ما عدد اللوحات التي حرفاها مختلفان وأرقامها الثلاثة مختلفة؟

الحل

(أ) واضح أنه يمكن اختيار كل من الحرفين بـ26 طريقة وأنه يمكن اختيار كل من الثلاثة أرقام بـ10 طرق. إذن عدد اللوحات هو $(26)^2 . (10)^3$.

(ب) بما أنه لا يوجد تكرار حروف أو تكرار أرقام فإن عدد اللوحات هو

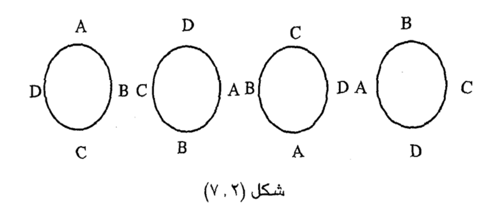
$$[P(26, 2)] . [P(10, 3)] = (26).(25).(10).(9).(8)$$.

مثال (٧,١٠)

بكم طريقة يستطيع أربعة أشخاص الجلوس حول مائدة دائرية إذا كنا نعتبر أن نسقين للجلوس غير مختلفين إذا كان يمكن الحصول على أحدهما من الآخر بوساطة دوران؟

الحل

لتكن $\{A, B, C, D\}$ هي مجموعة الأشخاص الأربعة. لاحظ أن كلا من أنساق الجلوس التالية غير مختلف عن الآخر:



شكل (٢ . ٧)

وبالتـالي فإن التـبـديل ABCD يقـابل الأربعـة أنسـاق الدائرية غـيـر المختلفـة المرسومة أعلاه. بالمثل إن أي تبديل للمجموعة { A , B , C, D } يقابل أربعة أنساق دائرية غير مختلفة. وبالتالي فإن عدد الطرق المختلفة للجلوس حول الطاولة هو $\frac{4!}{4} = 3! = 6$.

تمارين (٢,٧)

(١) احسب قيمة كل مما يلي : P(5 , 3) ، P (7 , 2) ، P (6 , 4) .

(٢) (أ) ماهو عدد التبديلات من السعة 3 في مجموعة عدد عناصرها 6؟

(ب) ماهو عدد التبديلات من السعة 4 في مجموعة عدد عناصرها 4؟

(٣) ماهو عدد الأعداد التي يتكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة من المجموعة {2 , 5 , 7}؟

(٤) كم عدداً يمكن تكوينه من الأرقام من 0 إلى 9 إذا كان :

(أ) العدد مكونًا من رقمين ولا يسمح بتكرار الرقم؟

(ب) العدد مكونًا من 3 أرقام ولا يسمح بتكرار الرقم؟

(جـ) العدد مكونًا من 4 أرقام ولا يسمح بتكرار الرقم حيث الرقم 5 يجب أن يكون في منزلة العشرات؟

(د) العدد مكونًا من 5 أرقام ولا يسمح بتكرار الرقم حيث الرقم 2 يجب أن يكون في منزلة الآحاد والرقم 3 يجب أن يكون في منزلة المئات؟

(٥) أثبت أن $P(n+1,3) - P(n,3) = 3\,P(n,2)$ لكل عدد صحيح $n \geq 3$.

(٦) أثبت أنه لكل عدد صحيح $n \geq 2$ فإن

(أ) $P(n, n) = P(n, n-1)$ (ب) $P(n+1,3) = n^3 - n$

(جـ) $P(n+1,2) - P(n, 2) = 2\,P(n,1)$ (د) $P(n,2) + P(n,1) = n^2$

(٧) نريد ترتيب 5 كتب مختلفة في الرياضيات، 3 كتب مختلفة في الأحياء و3 كتب مختلفة في التاريخ على أحد الرفوف.

(أ) بكم طريقة يمكن ترتيب جميع الكتب؟

(ب) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا أردنا أن نجعل كتب كل موضوع على حدة؟

(٨) نريد ترتيب 4 كتب مختلفة في الرياضيات و 4 كتب مختلفة في الفيزياء على أحد الرفوف.

(أ) بكم طريقة يمكن ترتيب جميع الكتب؟

(ب) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا أردنا أن نجعل كتب كل موضوع على حدة؟

(جـ) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا أردناها أن تتناوب على النحو الآتي: رياضيات، فيزياء، رياضيات، . . . ؟

(د) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا كان أوّل النسق كتاب رياضيات وآخره كتاب فيزياء؟

(٩) نريد ترتيب 3 كتب مختلفة في الرياضيات، 3 كتب مختلفة في الفيزياء و 3 كتب مختلفة في الكيمياء.

(أ) بكم طريقة يمكن ترتيب جميع الكتب؟

(ب) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا أردناها أن تتناوب على النحو الآتي: رياضيات، فيزياء، كيمياء، رياضيات، . . . ؟

(جـ) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا أردناها أن تتناوب؟

(١٠) يريد مدير شركة أن يقابل سبعة أشخاص كل شخص على حدة. بكم طريقة يمكنه أن يجدول المقابلات؟

(١١) يريد مدير شركة أن يقابل ثلاثة أشخاص قبل الظهر وخمسة أشخاص آخرين بعد الظهر. بكم طريقة يمكنه أن يجدول المقابلات إذا كان يريد أن يقابل كل شخص على حدة؟

(١٢) يريد مهندس أن يتفقد مواقع ثلاثة مشاريع قبل الظهر وأن يتجول في أربعة أسواق بعد الظهر وأن يجتمع بثلاثة أشخاص في المساء. بكم طريقة يمكنه أن يجدول مواعيده إذا أراد أن يجتمع بكل شخص على حدة؟

(١٣) لتكن $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. نريد أن ننشىء متتالية بحيث تكون حدودها مختلفة ومأخوذة من A وبحيث يكون عدد حدود المتتالية $2n$.

(أ) بكم طريقة يمكن إنشاء المتتالية إذا كانت الأعداد الفردية تسبق الزوجية؟

(ب) بكم طريقة يمكن إنشاء المتتالية إذا كانت حدودها تتناوب على النحو الآتي: فردي، زوجي، فردي، . . . ؟

(جـ) بكم طريقة يمكن إنشاء المتتالية إذا كان حدها الأول عدداً زوجيًا وحدها الأخير عدداً فرديًا؟

(١٤) لتكن $\{A, B, \ldots, Z\}$ هي الأبجدية الإنجليزية ولتكن $\{0, 1, \ldots, 9\}$ هي

مجموعة الأرقام العشرية . في إحدى الدول تتكون لوحات السيارات من ثلاثة حروف يتبعها ثلاثة أرقام .

(أ) ما عدد اللوحات؟

(ب) ما عدد اللوحات التي أرقامها الثلاثة مختلفة؟

(جـ) ما عدد اللوحات التي حروفها الثلاثة مختلفة؟

(د) ما عدد اللوحات التي حروفها الثلاثة مختلفة وأرقامها الثلاثة مختلفة؟

(١٥) بكم طريقة يستطيع سبعة أشخاص الجلوس حول طاولة دائرية؟

(١٦) بكم طريقة يستطيع أربعة أطباء وأربعة مهندسين الجلوس حول طاولة دائرية؟

(١٧) بكم طريقة يستطيع ثلاثة أطباء وثلاثة مهندسين الجلوس حول طاولة دائرية إذا كان نسق الجلوس على الشكل الآتي : طبيب، مهندس، طبيب، . . . ؟

(٧,٣) التوافيق (التراكيب)
Combinations

تعريف (٧,٢)

إذا كانت A مجموعة حيث $|A| = n$ وكانت B مجموعة جزئية من A حيث $|B| = k$ فإننا نسمي B توفيقًا (أو تركيبًا) من السعة k في A. نستخدم الرمز $\binom{n}{k}$ أو الرمز $C(n,k)$ للدلالة على عدد جميع التوافيق من السعة k في A.

مبرهنة (٧,٥)

إذا كان n و k عددين صحيحين حيث $0 \le k \le n$ فإن :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,.\,(n-k)!}$$

البرهان

لتكن A مجموعة حيث $|A| = n$. نعلم أن المجموعة الخالية ϕ هي المجموعة الجزئية الوحيدة (في A) التي عدد عناصرها صفر. إذن $\binom{n}{0} = 1$. من ناحية أخرى $1 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!}$. إذن $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!}$. الآن، نفرض أن $k > 0$. من أجل الحصول على تبديل من السعة k في A ننفذ الخطوتين التاليتين:

١- نختار مجموعة جزئية من السعة k في A.

٢- نختار ترتيبًا كليًا للمجموعة الجزئية التي اختيرت.

بما أن عـدد طرق إجـراء الخطوة الأولى هو $\binom{n}{k}$، وبما أن عـدد طرق اجـراء الخطوة الثانية هو $k!$ فإننا بالاستناد إلى مبدأ الضرب للعد نجد أن $P(n,k) = \binom{n}{k} . k!$.

إذن، $\binom{n}{k} . k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ وبالتالي فإن $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,.\,(n-k)!}$. Δ

مبرهنة (٧,٦)

إذا كان n و k عددين صحيحين حيث $0 \le k \le n$ فإن $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

البرهان

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,[n-(n-k)]!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,.\,k!} = \binom{n}{k} \qquad \Delta$$

مبرهنة (٧,٧) (صيغة باسكال)

إذا كان n و k عددين صحيحين حيث $1 \le k \le n-1$ فإن

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

البرهان

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$=(n-1)!\left[\frac{1}{k!\,(n-1-k)!}+\frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!}\right]$$

$$=(n-1)!\left[\frac{(n-k)}{k!\,(n-k)!}+\frac{k}{k!\,(n-k)!}\right]$$

$$=(n-1)!\left[\frac{n}{k!\,(n-k)!}\right]$$

$$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$=\binom{n}{k} \qquad \Delta$$

مبرهنة (٧,٨)

إذا كان n و k عددين صحيحين حيث $0 \le k \le n$ فإن

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي على n .

لنفرض أن العبارة $P(n)$ هي :

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

إذا كان $n = 0$ فإن الطرف الأيسر هو $\binom{0}{0} = 1$ والطرف الأيمن هو $\binom{1}{1} = 1$.

إذن $P(0)$ صحيحة.

لنفرض أن P(n) صحيحة . الآن، باستخدام فرضية الاستقراء وصيغة باسكال، نجد أن :

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}$$
$$= \binom{n+2}{k+1}$$

إذن P (n+1) صحيحة . Δ

مثال (٧,١١)

إذا كانت ورقة اختبار تحتوي على 7 أسئلة وكان على الطالب أن يجيب عن 5 أسئلة فقط، فبكم طريقة يمكن للطالب أن يجيب على الاختبار ؟

الحل

عدد طرق الإجابة الممكنة هو $21 = \frac{7!}{5!\,.\,(7-5)!} = \binom{7}{5}$.

مثال (٧,١٢)

يعمل 12 مهندسًا في شركة، ولتنفيذ أحد المشاريع تريد الشركة اختيار فريق عمل مؤلف من 5 مهندسين .

(أ) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل؟

(ب) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا أصر مهندسان على العمل معًا؟

(جـ) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا رفض مهندسان أن يعملا معًا؟

الحل

(أ) عدد الطرق الممكنة هو :

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\,.\,(12-5)!} = 792 .$$

(ب) ليكن المهندسان اللذان يصرّان على العمل معًا هما x و y . إذا كان x و y ضمن الفريق المختار فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق هو $\binom{10}{3}$، أما إذا كان الفريق المختار لا يتضمن كلا من x و y فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق هو $\binom{10}{5}$. إذن، بالاستناد إلى مبدأ الجمع للعد نجد أن عدد الطرق الممكنة هو :

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{5} = 120 + 252 = 372 .$$

(جـ) ليكن المهندسان اللذان يرفضان العمل معًا هما x و y . إذا كان x ضمن الفريق المختار فإن y ليس ضمن الفريق وبالتالي، فإن عدد الطرق الممكنة في هذه الحالة هو $\binom{10}{4}$. بالمثل إذا كان y ضمن الفريق المختار فإن عدد الطرق الممكنة هو $\binom{10}{4}$. أما إذا كان الفريق لا يتضمن كلا من x و y فإن عدد الطرق الممكنة هو $\binom{10}{5}$. وبالتالي، فإن عدد الطرق الممكنة هو :

$$\binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 210 + 210 + 252 = 672 .$$

مثال (٧,١٣)

يعمل أربعة أطباء وسبعة ممرضين في مستوصف، وللقيام بحملة تطعيم في إحدى المدارس نريد اختيار فريق طبي مؤلف من ستة أشخاص .

(أ) بكم طريقة يمكن اختيار الفريق إذا كان يتألف من طبيبين وأربعة ممرضين؟

(ب) بكـم طريقـة يمكـن اختيـار الفريـق إذا أردنا أن يتضـمن طبيبًا واحـدًا على الأقل؟

(جـ) بكـم طريقـة يمكـن اختـيـار الفـريق إذا أردنا أن يتضـمن طبيبًا واحـدًا على الأكثر؟

الحل

(أ) عدد طرق اختيار الطبيبين هو $\binom{4}{2}$ وعدد طرق اختيار أربعة ممرضين هـو $\binom{7}{4}$. إذن، بالاستناد الى مبدأ الضرب للعد، نجد أن عدد الطرق هو

$$\binom{4}{2} \times \binom{7}{4} = (6) . (35) = 210 .$$

(ب) إذا كان الفريق يتضمن طبيبا واحدًا فإن عدد الطرق $\binom{4}{1}\binom{7}{5}$، وإذا تضـمن طبيبين فقط فإن عدد الطرق $\binom{4}{2}\binom{7}{4}$، وإذا تضمن ثلاثة أطباء فإن عدد الطرق هو $\binom{4}{3}\binom{7}{3}$، وإذا تضـمن أربعة أطباء فإن عدد الطرق هو $\binom{4}{4}\binom{7}{2}$. إذن، عدد الطرق الممكنة هو

$$\binom{7}{5}\binom{4}{1} + \binom{7}{4}\binom{4}{2} + \binom{7}{3}\binom{4}{3} + \binom{7}{2}\binom{4}{4} = 455 .$$

(جـ) إذا كان الفريق يتضمن طبيبًا واحدًا فإن عدد الطرق هو $\binom{4}{1}\binom{7}{5}$، أما إذا كان الفريق لا يتضمن أي طبيب فإن عدد الطرق هو $\binom{4}{0}\binom{7}{6}$. إذن، عـدد الطرق الممكنة هو

$$\binom{7}{5}\binom{4}{1} + \binom{7}{6}\binom{4}{0} = (21) (4) + (7) (1) = 91 .$$

ملاحظة

نتبع في أحيان كثيرة أسلوبًا غير مباشر لحساب عدد الطرق، وذلك بأن نطرح عدد الطـرق غير المطلوبة من العدد الكلي للطرق. فمثلا يمكن حل الفقرة (ب) في

المثال (١٣ , ٧) كما يلي : إن عدد الطرق الممكنة لاختيار فريق من ستة أشخاص هو $\binom{11}{6}$، كما أن عدد الطرق الممكنة لاختيار فريق من ستة أشخاص بحيث لا يتضمن أي طبيب هو $\binom{7}{6}$. إذن، عدد الطرق الممكنة هو $455 = 7 - 462 = \binom{7}{6} - \binom{11}{6}$.

مثال (٧,١٤)

لتكن $A = \{1,2,3,...,15\}$. جد عدد المجموعات الجزئية من السعة 2 في A والتي لاتتكون من عددين متعاقبين.

الحل

بما أن $|A| = 15$ فإن عدد المجموعات الجزئية من السعة 2 في A هو $\binom{15}{2}$. من ناحية أخرى، إن المجموعات الجزئية التي تتكون من عددين متعاقبين هي $\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, ..., \{14, 15\}$ وعددها هو 14. إذن، العدد المطلوب هو $91 = 14 - 105 = 14 - \binom{15}{2}$.

مثال (٧,١٥)

ليكن $P(n)$ هو المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه n. جد جميع قيم n بحيث يكون عدد أقطار $P(n)$ مساويًا لعدد أضلاعه.

الحل

بما أن عدد أضلاع $P(n)$ هو n فإن عدد رؤوسه هو n. إذن، إن مجموع عدد أضلاع $P(n)$ وعدد أقطاره هو $\binom{n}{2}$.

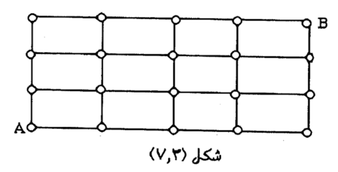
وبالتالي فإن عدد أقطار $P(n)$ هو :

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

بمـا أن عـدد الأقطار يسـاوي عـدد الأضلاع فـإن $n = \frac{n(n-3)}{2}$ وبالتالـي فـإن n $(n-5) = 0$. إذن $n=5$، وبالتالي، فإن الخماسي المنتظم هو المضلع المنتظم الوحيد الذي عدد أقطاره يساوي عدد أضلاعه.

مثال (٧,١٦)

الشكل (٧,٣) يمثل شبكة طرق. بكم طريقـة تسـتطيع الوصـول إلى B إذا انطلقت من A وكان عليك أن تسير شرقًا أو شمالا؟



شكل (٧,٣)

الحل

نصبغ كل قطعة مستقيم أفقية باللون الأخضر وكل قطعة مستقيم رأسية باللون الأحـمـر. واضح أنه إذا سرنا من A إلى B حسب الشـروط فإننا نستـخـدم أربع قطع خضراء وثلاث قطع حمراء. إذن، عدد الطرق هو

$$\binom{7}{4} = 35.$$

تمارين (٧,٣)

(١) احسب قيمة كل من العبارات التالية :

(أ) $\binom{12}{6}$ (ب) $\binom{10}{5}\binom{5}{3}$ (جـ) $\binom{100}{99}$

(د) $\binom{225}{225}$ (هـ) $\binom{14}{0}$ (ز) $\binom{7}{3}\binom{10}{9}\binom{4}{4}$

(٢) استخدم طرق العد لإثبات :

$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ لكل $0 \le k \le n-1$.

(٣) أثبت أن :

(أ) $\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$ (ب) $\binom{n}{k}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$.

(جـ) استخدم الفقرة (أ) لإثبات أن $\binom{2n}{n}$ عدد زوجي لكل $n \ge 1$.

(٤)(أ) إذا كانت ورقة اختبار تحتوي على 8 أسئلة وكان على الطالب أن يجيب عن 5 أسئلة فقط ، فبكم طريقة يمكن للطالب أن يجيب على ورقة الاختبار؟

(ب) بكم طريقة يمكن الطالب أن يجيب إذا كان يجب عليه أن يختار 3 أسئلة من بين الأسئلة الخمسة الأولى وسؤالين من باقي الأسئلة؟

(جـ) بكم طريقة يمكنه أن يجيب إذا كان يجب عليه أن يختار على الأقل سؤالين من بين الأسئلة الخمسة الأولى؟

(٥) يعمل 10 فنيين و5 مهندسين في مكتب هندسي ، ولتنفيذ أحد المشاريع ، يريد المكتب اختيار فريق عمل مكون من 9 أشخاص .

(أ) بكم طريقة يمكن اختيار الفريق إذا كان يتكون من 3 مهندسين و6 فنيين؟

(ب) بكم طريقة يمكن اختيار الفريق إذا أردنا أن يتضمن مهندسًا واحدًا على الأقل؟

(جـ) بكم طريقة يمكن اختيار الفريق إذا أردنا أن يتضمن مهندسًا واحدًا على الأكثر؟

(٦) مجلس إدارة مؤلف من 11 عضوًا، ولمهمة ما، نريد تكوين وفد مؤلف من 5 أعضاء.

(أ) بكم طريقة يمكن اختيار الوفد؟

(ب) بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا رفض عضوان أن يكونا معًا في الوفد؟

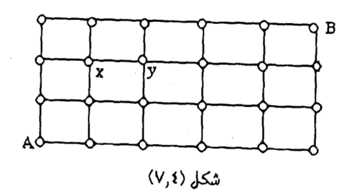
(جـ) بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا أصر عضوان أن يكونا معًا سواء ضمن الوفد أو خارجه؟

(٧) هل يوجد مضلع منتظم بحيث يكون عدد أقطاره مساويًا:

(أ) 3 أضعاف عدد أضلاعه؟ (ب) 4 أضعاف عدد أضلاعه؟

(جـ) 8 أضعاف عدد أضلاعه؟

(٨) الشكل (٧,٤) يمثل شبكة طرق، ومن الممكن السير شرقًا أو شمالا فقط.



شكل (٧,٤)

(أ) بكم طريقة تستطيع الوصول من A إلى B؟

(ب) بكم طريقة تستطيع الوصول من A إلى B إذا كان استخدام القطعة [xy] ممنوعًا؟

(جـ) بكم طريقة تستطيع الوصول من A إلى B إذا كان المرور في y ممنوعًا؟

(٩) بكم طريقة يمكن أن نجزِّىء مجموعة عدد عناصرها 15 إلى 3 مجموعات جزئية عدد عناصر كل منها 5؟

(١٠) لتكن $A = \{1,2,3 \ldots , 60\}$. جد عدد جميع المجموعات الجزئية من السعة 2 في A والتي مجموع عنصري كل منها عدد زوجي .

(١١) لدينا تسع نقاط بحيث كل ثلاث منها غير متسامتة (أي ليست على خط مستقيم واحد) .

(أ) كم خطًا مستقيمًا نستطيع أن نرسم؟

(ب) كم مثلثًا نستطيع أن نرسم؟

(٧,٤) مبرهنة ذات الحدين
The Binomial Theorem

مبرهنة (٧,٩)

إذا كان $n \geq 1$ عددًا صحيحًا فإن $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n . إذا كان $n=1$ فإن $(x + y)^1 = x+y$ وإن

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = x + y .$$

وبالتالي ، فإن المبرهنة صحيحة من أجل $n=1$. الآن ، نفرض أن

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k .$$

عندئذ:

$$(x+y)^{m+1} = (x+y)(x+y)^m$$

$$= (x+y)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^{k+1}$$

$$= \binom{m}{0}x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}x^{m+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}x^{m-k}y^{k+1} + \binom{m}{m}y^{m+1}$$

$$= x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}x^{m+1-k}y^k + \sum_{r=1}^{m}\binom{m}{r-1}x^{m+1-r}y^r + y^{m+1}$$

$$= x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}x^{m+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}x^{m+1-k}y^k + y^{m+1}$$

$$= x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right]x^{m+1-k}y^k + y^{m+1}$$

$$= \binom{m+1}{0}x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}x^{m+1-k}y^k + \binom{m+1}{m+1}y^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^{m+1-k}y^k$$

وبالتالي، فإن المبرهنة صحيحة من أجل $n = m+1$. Δ

مثال (٧,١٧)

(أ) بوضع $x=1$ و $y=1$ في مبرهنة ذات الحدين نجد أن $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ وبالتالي، فإن

2^n هو عدد المجموعات الجزئية لأي مجموعة عدد عناصرها يساوي n .

(ب) بوضع x=1 و y=-1 في مبرهنة ذات الحدين ، نجد أن $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

إذن ،

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots .$$

وبالتالي ، إذا كانت A مجموعة حيث $|A| = n$ فإن عدد المجموعات الجزئية من A التي تتكون من عدد زوجي من العناصر يساوي عدد المجموعات الجزئية من A التي تتكون من عدد فردي من العناصر .

مثال (٧,١٨)

جد مفكوك كل من :

(أ) $(x+y)^5$ (ب) $(a-4b)^4$.

الحل

(أ)

$$(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} y^k$$
$$= x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + y^5$$
$$= x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5$$

(ب)

$$(a-4b)^4 = (a+(-4b))^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} (-4b)^k$$
$$= a^4 + \binom{4}{1} a^3(-4b) + \binom{4}{2} a^2 (-4b)^2 + \binom{4}{3} a(-4b)^3 + (-4b)^4$$
$$= a^4 - 16a^3 b + 96a^2 b^2 - 256ab^3 + 256b^4$$

مثال (٧,١٩)

جد معامل x^7 في مفكوك $(2x+3)^{10}$.

الحل

بما أن $\binom{10}{3}(2x)^7(3)^3 = (120)(128)(27)x^7$. فإن معامل x^7 هو $(120)(128)(27) = 414720$.

تمارين (٧,٤)

(١) جد مفكوك كل من

(أ) $(2+x)^6$ (ب) $(1-x)^7$ (جـ) $(x^2-y)^4$.

(د) $(\frac{3}{x}-\frac{x}{3})^4$ (هـ) $(a-3b)^3$ (و) $(x+\frac{1}{x})^5$

(٢) (أ) جد معامل x^5y^7 في مفكوك $(x-2y)^{12}$

(ب) جد معامل x^4y^2 في مفكوك $(x^2+y)^4$

(جـ) جد معامل $x^{-6}y^3$ في مفكوك $(2x^{-1}-y)^9$

(٣) أثبت أن $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n$.

(٤) جد $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\binom{n}{2}+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{n}{n}$.

(٥) أثبت أن $\binom{n}{1}+6\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}=n^3$.

(٦) أثبت أن $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$.

(٧) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن $\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$.

(٨) أثبت ما يلي:

(أ) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

(ب) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

(جـ) $\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k} = 2^{n} + n\,2^{n-1} - 1$.

(٩) استخدم طرق العد لإثبات أن:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \dots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}.$$

(١٠) استخدم التمرين (٩) لإثبات أن $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

(١١) (أ) إذا كان p عدد أوليًا فأثبت أن $\binom{p}{k}$ يقبل القسمة على p بدون باقٍ لكل عدد صحيح $0 < k < p$.

(ب) اكتب مفكوك $2^p = (1+1)^p$ ثم أثبت أن $2^p - 2$ يقبل القسمة على p بدون باقٍ، حيث p عدد أولي.

(٧,٥) مبدأ برج الحمام
The Pigeonhole Principle

إن مبدأ برج الحمام بسيط ولكنه يُعَدُّ أداة فعّالة عندما نحاول أن نثبت أنه يوجد حل لمسألة تركيبية. وهذا المبدأ لا يرشدنا إلى كيفية الحصول على حل ولا

يعطينا عدد الحلـول الممكنة ولكنه يخبرنا أنه يوجد حل واحد، على الأقل، للمسألة المعالجة.

مبرهنة (٧,١٠) (مبدأ برج الحمام)

إذا وزعنا m حمامة على برج للحمام عدد عيونه n وكان $m > n$ فإن عينًا واحدة على الأقل يجب أن تحتوي على حمامتين على الأقل.

البرهان

إذا كـانت كل عين من عيـون البرج تحتوي على حمـامة على الأكثر فإن عـدد الحمام أقل أو يساوي عدد عيون البرج، أي $m \leq n$. وهذا يناقض $m > n$. Δ

هناك طرق مختلفة للتعبير عن هذا المبدأ. أحيانًا، نستخدم الصناديق والكرات بدلا من العيون والحمام، وأحيانًا نستخدم لغة المجموعات للتعبير عن هذا المبدأ كما يلي:

إذا كان $f : A \longrightarrow B$ تطبيقًا وكان $|A| = m > n = |B|$ فإن f ليس أحـاديًا، أي يوجد على الأقل عنصران مختلفان x_1 ، x_2 في A حيث $f(x_1) = f(x_2)$.

مثال (٧,٢٠)

يحتوي كيس على 5 كرات بيض و7 كرات سود. ماهو أقل عدد من الكرات التي يجب أن نسحبها من الكيس حتى نضمن أننا قد سحبنا كرتين من نفس اللون.

الحل

نفرض أن الألوان هي الصناديق. إذن لدينا صندوقان هما الأبيض والأسود.

لكي يحتوي صندوق على كرتين علينا أن نسحب كرات عددها أكبر من عدد الصناديق. إذن، علينا أن نسحب 3 كرات على الأقل.

مثال (٧,٢١)

لتكن $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ مجموعة من الأعداد الصحيحة وليكن $n > 1$ عددًا صحيحًا. أثبت أنه إذا كان $m > n$ فإنه يوجد $i \neq j$ حيث باقي قسمة x_i على n يساوي باقي قسمة x_j على n.

الحل

نلاحظ أن باقي قسمة أي عدد صحيح على n هو i حيث $0 \leq i \leq n-1$. ضع $B = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ وعرف التطبيق $f : A \longrightarrow B$ كما يلي:
f(x)= (باقي قسمة x على n) لكل $x \in A$. بما أن $|A| = m > n = |B|$ فإن f ليس أحاديا. إذن، يوجد $i \neq j$ حيث $f(x_i) = f(x_j)$.

مثال (٧,٢٢)

إذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_n$ أعدادًا صحيحة. فأثبت أنه يوجد $1 \leq k < m \leq n$ حيث $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_m$ يقسم على n بدون باق.

الحل

إذا كان أحد الأعداد $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ يقبل القسمة على n بدون باق فإننا نحصل على المطلوب. لذلك، نفرض أن باقي قسمة كل من هذه الأعداد على n ينتمي إلى $B = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

بما أن عدد الأعداد هو n و $|B| = n-1$ فإنه يوجد $1 \leq k < m \leq n$ حيث باقي قسمة

$a_1 + a_2 + ... + a_k$ على n يساوي باقي قسمة $a_1 + a_2 + ... + a_m$ على n. لذلك، نفرض أن $a_1 + a_2 + ... + a_k = an + r$ و $a_1 + a_2 + ... + a_m = bn + r$ حيث $1 \leq r \leq n-1$ هو باقي القسمة. إذن،

$$(a_1 + ... + a_m) - (a_1 + ... + a_k) = (bn + r) - (an + r)$$

وبالتالي، فإن

$$a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_m = (b-a)\, n .$$

مثال (٧,٢٣)

لتكن $A = \{1, 2, 3, ..., 2n\}$ ولتكن $B = \{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$ حيث $B \subset A$. أثبت أنه يوجد $x_k \neq x_m$ حيث يقسم أحدهما على الآخر بدون باق.

الحل

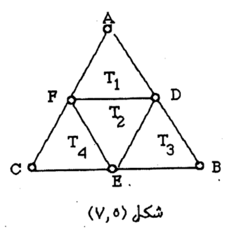
ليكن $x_j = y_j\, 2^{t_j}$ لكل $j = 1, 2, ..., n+1$ حيث y_j عدد فردي. لتكن $B = \{1, 3, 5, ..., 2n-1\}$. واضح أن $|B| = n$ وأن $y_j \in B$ لكل j. بما أن $|\{y_1, y_2, ..., y_{n+1}\}| = n+1$ وبما أن $|B| = n$ فإنه يوجد $k \neq m$ حيث $y_k = y_m$. وبالتالي فإن $x_k = y_k 2^{t_k}$ و $x_m = y_m\, 2^{t_m} = y_k 2^{t_m}$. إذن، أحد العددين x_k و x_m يقبل القسمة على الآخر بدون باق.

مثال (٧,٢٤)

ABC مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 2 سم. ماهو أكبر عدد من النقاط التي يمكن اختيارها من بين النقاط التي تقع داخل المثلث وعلى أضلاعه بحيث تكون المسافة بين كل زوج من النقاط المختارة أكبر من 1 سم؟

الحل

لتكن D , E , F هي النقاط التي تنصف أضلاع المثلث ABC كما في الشكل (٧,٥):



شكل (٧,٥)

لتكن T_4 , T_3 , T_2 , T_1 هي المثلثات الموضحة في الشكل. واضح أن T_j مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه 1 سم. وبالتالي فإن المسافة بين أي زوج من النقاط التي تقع داخل T_j وعلى أضلاعه أقل من أو تساوي 1 سم. إذن، إذا اعتبرنا T_4 , T_3 , T_2 , T_1 هي الصناديق والنقاط المطلوبة هي الكرات فبالاستناد إلى مبدأ برج الحمام نجد أن عدد النقاط المطلوبة أقل أو يساوي 4. إذا كانت النقطة G هي المركز المتوسط للمثلث ABC فإننا نجد بسهولة أن النقاط A , B , C, G تحقق المطلوب. إذن، العدد المطلوب هو 4.

من الممكن تعميم مبدأ برج الحمام بطرق مختلفة، وفي ما يلي سنعطي أحد هذه التعميمات.

مبرهنة (٧,١١) (مبدأ برج الحمام المعمَّم)

إذا وزعنا m حمامة على برج للحمام عدد عيونه n وكان $m > kn$ حيث k عدد صحيح موجب فإن عينًا واحدة على الأقل يجب أن تحتوي على $k+1$ حمامة على الأقل.

البرهان

إذا كانت كل عين من عيون البرج تحتوي على k حمامة على الأكثر فإن عدد الحمام أقل أو يساوي kn، أي $m \leq kn$. إن هذا يتناقض مع $m > kn$. Δ

وإذا استخدمنا لغة المجموعات فإننا نستطيع صياغة مبدأ برج الحمام المعمّم كما يلي:

ليكن $f : A \longrightarrow B$ تطبيقًا حيث $|A| = m$ و $|B| = n$. إذا كان $m > kn$ حيث k عدد صحيح موجب، فإنه يوجد على الأقل k+1 عنصرًا مختلفًا $x_1 , x_2 , ..., x_{k+1}$ في A حيث $f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_{k+1})$.

مثال (٧,٢٥)

إذا وزعنا 40 رسالة على ثلاثة صناديق للبريد فأثبت أن أحد الصناديق يحتوي على 14 رسالة على الأقل.

الحل

بما أن $40 > (13) (3)$ فبالاستناد إلى مبدأ برج الحمام المعمّم نلاحظ أنه يوجد صندوق واحد على الأقل حيث يحتوي $14 = 1 + 13$ رسالة على الأقل.

تمارين (٧,٥)

(١) لتكن x_1 , x_2 , x_3 أعدادًا صحيحة مختلفة. أثبت أنه يوجد $x_m \neq x_k$ بحيث $x_m - x_k$ عدد زوجي.

(٢) لتكن $x_1 , x_2 , ..., x_{11}$ أعداداً صحيحة مختلفة أثبت أنه يوجد $x_m \neq x_k$ بحيث $x_m - x_k$ يقسم على 10 بدون باق.

(٣) لتكن $x_1 , x_2 , ... , x_n$ أعداداً صحيحة مختلفة. جد أصغر قيمة للعدد n إذا كان يوجد $x_m \neq x_k$ بحيث $x_m - x_k$ يقسم على 100 بدون باق.

(٤) تقدم 22 طالباً إلى أحد الامتحانات. إذا كانت العلامة الكاملة للامتحان هي 20 فأثبت أن طالبين على الأقل قد حصلا على نفس العلامة.

(٥) في إحدى المدن وفي أحد الأيام ولد 97 طفلا. أثبت أن 5 أطفال على الأقل قد ولدوا في إحدى ساعات ذلك اليوم.

(٦) يحتوي صندوق على 40 قلماً. إذا كان الصندوق يحتوي فقط على أقلام رصاص وأقلام حبر جاف وأقلام حبر سائل فأثبت أنه يوجد في الصندوق 14 قلماً على الأقل من أحد الأنواع.

(٧) مربع طول ضلعه 2 سم. ما أكبر عدد من النقاط التي يمكن اختيارها من بين النقاط التي تقع داخل المربع وعلى أضلاعه بحيث تكون المسافة بين كل زوج من النقاط المختارة أكبر من $\sqrt{2}$ سم؟

(٨) لتكن $A = \{1 , 2 , ..., 8\}$ ولتكن $B = \{x_1 , ... , x_5\}$ بحيث $B \subset A$. أثبت أنه يوجد $x_k \neq x_m$ بحيث $x_k + x_m = 9$.

(٩) لتكن $a_1 , a_2 , ... , a_n$ أعداداً صحيحة موجبة. إذا وزعنا $a_1 + a_2 + ... + a_n - n+1$ كرة على n صندوقاً فأثبت أنه إمّا أن يحتوي الصندوق الأول على a_1 كرة على الأقل أو أن يحتوي الصندوق الثاني على a_2 كرة على الأقل أو. . . أو يحتوي الصندوق الذي رقمه n على a_n كرة على الأقل.

(١٠) لتكن $A_1 , A_2 , ... , A_5$ خمس نقاط مختلفة في المستوى بحيث إحداثياتها أعداد صحيحة. أثبت أنه توجد $A_k \neq A_m$ بحيث تكون إحداثيات نقطة المنتصف لقطعة المستقيم $[A_k A_m]$ أعداداً صحيحة.

(١١) لتكن A_1 , A_2 , ... , A_9 تسع نقاط مختلفة في الفضاء بحيث إحداثياتها أعداد صحيحة. أثبت أنه توجد $A_k \neq A_m$ بحيث تكون إحداثيات نقطة المنتصف لقطعة المستقيم $[A_k A_m]$ أعدادًا صحيحة.

(١٢) ليكن x_1 , x_2 , ... , x_6 ستة أشخاص. نفرض أنه لكل $i \neq j$ فإن x_i يتبادل الصداقة أو يتبادل العداوة مع x_j. أثبت أنه يوجد ثلاثة أشخاص بحيث يتبادلون الصداقة مثنى مثنى أو يتبادلون العداوة مثنى مثنى.



المراجع

[1] Althoen S. C. and Bumcrot R. J., *Introduction to Discrete Mathematics*. PWS - Kent, 1988.

[2] Bogart K. P., *Introductory Combinatorics*. Pitman, 1983.

[3] Brualdi R. A., *Introductory Combinatorics*. North Holland, Elsevier, 1979.

[4] Gerstein L. J., *Discrete Mathematics and Algebraic Structures*. Freeman, 1987.

[5] Grimaldi R. P., *Discrete and Combinatorial Mathematics*. An Applied Introduction, Addison - Wesley, 1985.

[6] Hillman A. P., Alexanderson G. L. and Grassl R. M., *Discrete an Combinatorial Mathematics*. Dellen - Macmillan, 1987.

[7] Johnsonbaugh R., *Discrete Mathematics* (Revised Edition). Macmillan, 1986.

[8] Molluzzo J. C. and Buckley F., *A First Course in Discrete Mathematics*. Wadsworth, 1986.

[9] Polimeni A. D. and Straight H. J., *Foundation of Discrete Mathematics*. Brooks/Cole, 1985.

[10] Roberts F. S., *Applied Combinatorics*. Prentice - Hall, 1984.

[11] Roman S., *An Introduction to Discrete Mathematics*, Sounders College Publishing, 1986.

[12] Tucker A., *Applied Combinatorics*. John Wiley and Sons, 1980.

ثبت المصطلحات

- عربي - إنجليزي
- إنجليزي - عربي

أولا: عربي - إنجليزي

أ

أبجدية	Alphabet
إبدالي	Commutative
اتحاد	Union
إتساق	Consistency
أحادي (متباين)	One-to-one
أدوات الربط	Connectives
ارتداديا	Recursively
إرتفاع	Height
أساسي	Basic
الاستقراء الرياضي	Mathematical induction
أصغري	Minimal

Reflexive closure	الإغلاق الإنعكاسي
Symmetric closure	التناظري
Transitive closure	المتعدي
Assumption	افتراض
Optimal	أمثل
Number systems	الأنظمة العددية
Reflexive	إنعكاسية

ب

Invalid	باطل
Proof by exhaustion	البرهان بوساطة الإستنفاد
Proof by contradiction	بوساطة التناقض
Proof by cases	بوساطة الحالات
Proof by counterexample	بوساطة المثال المتناقض
Proof by contraposition	بوساطة المكافيء العكسي
Direct proof	المباشر
Simple	بسيط
Gate	بوابة
AND gate	العطف
OR gate	الفصل
Invertor gate	معاكسة
Logic gate	منطقية

Not gate	النفي
NAND gate	نفي العطف
Nor gate	نفي الفصل

ت

Successor	تابع
Immediate successor	مباشر
Permutations	التباديل
Simplification	تبسيط
Partition	تجزئة
Associative	تجميعي
Composition	تحصيل
Antisymmetric	تخالفية
Combinations	التراكيب
Well-ordering	ترتيب حسن
Polish post fix notation	الترميز البولندي (العكسي)
Polish prefix notation	البولندي (المباشر)
Infix notation	الداخلي
Inorder traversal	تسلق داخلي
Postorder traversal	عكسي
Preorder traversal	مباشر
Encoding (coding)	تشفير

تصميم	Design
تعويض	Substitution
تقاطع	Intersection
تقرير	Statement (proposition)
بسيط	Simple statement
تناقضي	Contradictory statement
شامل	Universal statement
شرطي شامل	Universal conditional statement
مركب	Compound statement
مسور	Quantified statement
مصدوقي	Tautological statement
وجودي	Existential statement
تقصٍ عرضي	Breadth-first search
عمقي	Depth-first search
تكافؤ	Equivalence
تكرار (تردد)	Frequency
تماثل	Isomophism
تمثيل	Representation
تمييز	Characterization
تناظرية	Symmetric
تناقض	Contradiction
توزيعي	Distributive

ث

ثنائي الشرط	Biconditional
ثنوي	Dual

ج

جبر	Algebra
بولي	Booean algebra
جبريات	Algebras
جُداء (حاصل ضرب)	Product
مجاميع أصغري	Minimal product of sums
مجاميع تام	Complete product of sums
جدول	Table
الصواب	Truth table
جذر	Root
جسر	Bridge
جملة مفتوحة	Open sentence

ح

حاصل الضرب (الجداء)	Product
الديكارتي	Cartesion product
حُجة	Argument
حساب المسندات	Predicate

حد	Term
أصغري	Minterm
أعظمي	Maxterm
المقتضي الأولي	Prime implicant
حَرِج	Critical
حرف	Literal
حرف	Letter (character)

خ

خاصة الصّدر	Prefix property
خاطيء	False
خطوة الأساس (الخطوة الأساسية)	Basis step
الاستقراء	Inductive step
خلية	Cell
خوارزمية	Algorithm

د

دارة	Circuit
عطف وفصل أصغرية	Minimal and-or circuit
منطقية	Logic circuit
دالة (تطبيق)	Mapping
دالة (تطبيق)	Function
دالة(تطبيق)	Map

دالة بُولية	Boolean function
درجة	Degree
دورة	Cycle

ر

رأس	Vertex
داخلي	Internal vertex
زوجي	Even vertex
فردي	Odd vertex
منعزل	Isolated vertex
رسم	Graph
أويلري	Eulerian graph
تام	Complete graph
تام ثنائي التجزئة	Complete bipartite graph
ثنائي التجزئة	Bipartite graph
جزئي	Subgraph
الجزئي المُحدَث	Induced subgraph
الرَّديف	Underlying graph
مترابط	Connected graph
المتمم	Complementary graph
مستو	Planar graph
منتظَم	Regular graph

رسم منته	Finite graph
موجه	Directed graph
نصف أويلري	Semi-Eulerion graph

ز

زوج مرتّب	Ordered pair
زوجي	Even

س

ساقط (واقع)	Indicent
سلسلة	Chain

ش

شامل	Onto
شجرة	Tree
تقصٍ ثنائية	Binary search tree
ثنائية	Binary tree
منتظمة	Regular binary tree
جزئية	Subtree
مُولّدة	Spanning tree
شرط كاف	Sufficient condition
لازم	Necessary condition
وكاف	Necessary and sufficient condition

شرطي	Conditional
شكل	Form
شكل	Figure
الحُجي	Argument form
(رسم تخطيطي)	Diagram
سهمي	Arrow diagram
ڤن	Venn diagram
كارنو	Karnaugh map
هاس	Hasse diagram
(شيفرة)	Code

ص

صائب	True
بشكل تافه	Trivially true
فراغيا	Vacuously true
صحَّة	Validity
صَحيح	Valid
صدر (سابقة)	Prefix
صف	Row
صَمِّم دارة منطقية	Design a logic circuit
صورة	Image
صيغة أويلر	Euler's formula

ض

ضلع	Edge
متكرر (مكرر)	Multiple edge
موجه	Directed edge

ط

طرف	End point
طريق	Trail
طول	Length

ع

عبارة بُولية	Boolean expression
تقريرية	Propositional expression
تقريرية	Propositional form
تقريرية	Statement form
ثنوية	Dual expression
عدد أولي	Prime number
عدد صحيح	Integer
كسري	Rational number
عروة	Loop
عطف	Conjunction
عكس	Converse

علاقة	Relation
تامة	Complete relation
ترتيب	Order relation
جزئي	Partial order relation
كلي	Total order relation
تكافؤ	Equivalence relation
ثنائية	Binary relation
عكسية	Inverse relation
على	Relation on
قطرية	Diagonal relation
متممة للعلاقة R	Complement of the relation R
علامة (علّم)	Label
عمق	Depth
عملية أُحادية	Unary operation
ثنائية	Binary operation
عمود	Column
عنصر أصغر (عنصر أصغري)	Least element
العنصر المحايد	Identity element

غ

غابة	Forest
غطاء	Cover

غير متسق	Inconsistent

ف

فردي	Odd
فرضي	Hypothetical
فرضية (فرض)	Hypothesis
فرع	Branch
فصل	Disjunction
تكافؤ	Equivalence class
فقط إذا	Only if

ق

قانون	Law
الامتصاص	Absorption law
الجمود	Idempotent law
قُطر	Diagonal
رئيسي	Main diagonal
قياس n	Mod n
قيمة الصواب	Truth value
المخرجة	Output
المدخلة	Input

ك

الكسور الثنائية	Binary fractions
كلمة	Word
ثنائية	Binary word
خالية	Empty word

ل

لامتغير	Invariant
تماثلي	Isomorphic invariant
لغة	Language

م

مبادىء العد	Counting principles
مبدأ	Principle
برج الحمام	Pigeonhole principle
الثنوية	Principle of duality
متتالية	Sequence
متناوبة	Alternating sequence
مُتجاور	Adjacent
مترابطة	Connected
مُتسق	Consistent
متعدية	Transitive

متغير بُولي	Boolean variable
تقريري	Statement variable
متقطع	Discrete
متكافيء	Equivalent
منطقيا	Logically equivalent
متماثل	Isomorphic
متمم	Complement
التسعات	Nines complement
شكل كارنو	Complementary karnaugh map
العشرات	Tens complement
متناوب	Alternating
مثال مناقض	Counterexample
مجال	Domain
مجاور	Adjacent
مجموع جُداءات أصغري	Minimal sum of products
جُداءات تام	Complete sum of products
مجموعة الصواب	Truth set
القوة	Power set
متقطعة	Discrete set
مرتبة جزئيا	Poset
مرتبة جزئيا	Partially ordered set
مُحدث بوساطة	Induced by

Range	مدى
Ordered	مُرتب
Connected with	مُرتبط بِـ
Immediate precessor	مرجع مَباشر
Connected component	مركبة مترابطة
Center	مركز
Walk	مسار
Distance	مسافة
Maximal rectangle	مستطيل أعظمي
Level	مستوى
Axiom	مسلمة (موضوعة)
Predicate	مسند
Quantifier	مسور
Universal quantifier	شامل
Existential quantifier	وجودي
Tautology	مصدوقة
Adjacency matrix	مصفوفة الجوار
Symmetric matrix	متماثلة (متناظرة)
Incidence matrix	الوقوع
Inverse	مُعكاس
Closed	مُغلق
Open	مفتوح

مقدمة منطقية	Premise
مكافيء	Equivalent
عكسي	Contrapositive
ممر	Path
منطقة	Region
مُولدٌ (رسم جزئي مولدٌ)	Spanning (subgraph)

ن

نتيجة	Conclusion
نسق	Arrangement
النظام الثماني	Octal system
الثنائي	Binary system
الستة عشري	Hexadecimal number system
نظرية الرسومات	Graph theory
نفي	Negation
نموذج رياضي	Mathematical model
نوني مرتب (عديد من النوع n)	N.tuple

و

وجه	Face
وحدانية	Uniqueness
وحيد	Unique

Leaf	ورقة
Weight	وزن

ي

Induce	يُحْدِث
Encode	يشفِّر
Is congruent to	يطابق
Decode	يفك الشفره (يفك الرمز)
Logically implies	يقتضي منطقيا



ثانيًا : إنجليزي - عربي

A

Absorption law	قانون الامتصاص
Adjacency matrix	مصفوفة الجوار
Adjacent	متجاور
Adjacent	مُجاور
Algebra	جبر (جبرية)
Algebras	جبريات
Algorithm	خوارزمية
Alphabet	أبجدية
Alternating	متناوب
sequence	متتالية متناوبة
AND Gate	بوابة العطف
Antisymmetric	تخالفية
Argument	حجة
form	الشكل الحجي
Arrangement	نسق
Arrow diagram	شكل سهمي
Associative	تجميعي

Assumption hافتراض

Axiom مسلمة (موضوعة)

B

Basis أساس

step خطوة الأساس (الخطوة الأساسية)

Biconditional ثنائي الشرط

Binary fractions الكسور الثنائية

operation عملية ثنائية

relation علاقة ثنائية

search tree شجرة نقص ثنائية

System النظام الثنائي

tree شجرة ثنائية

word كلمة ثنائية

Binomial theorem مبرهنة ذات الحدين

Bipartite graph رسم ثُنائي التجزئة

Boolean algebra جبر بولي

expression عبارة بُولية

function دالة بُولية

variable متغير بولي

Branch فرع

Breadth-first searc	تقصٍ عرضي
Bridge	جسر

C

Cartesian product	حاصل ضرب الديكارتي
Cell	خلية
Center	مركز
Chain	سلسلة
Characterization	تمييز
Circuit	دارة
Closed	مُغلق
Code	شيفرة (شفرة)
Column	عمود
Combinations	التراكيب
Commutative	إبدالي
Complement	متُمِّم
Complementary graph	الرسم المُتمِّم
Karnaugh map	متمم شكل كارنو
Complement of the relation R	العلاقة المتممة للعلاقة R
Complete bipartite graph	رسم تام ثنائي التجزئة
graph	رسم تام
relation	العلاقة التامة

sum of products	مجموع جُداءات تام
product of sums	جُداء مجاميع تام
Component	مُركبَّة
Composition	تحصيل
Compound statement	تقرير مركب
Conclusion	نتيجة
Conditional	شرطي
Conjunction	عطف
Connected	مترابطة
component	مركبة مترابطة
graph	رسم مترابط
with	مُرتبط بـ
Connectives	أدوات الَربط
Consistency	إتساق
Consistent	متسق
Contradiction	تناقض
Contradictory statement	تقرير تناقضي
Contrapositive	مكافيء عكسي
Converse	عكس
Counter example	مثال مناقض
Counting principles	مبادىء العد
Cover	غطاء

Critical	حَرِجٌ
Cycle	دورة

D

Decode	يفك الشيفرة
Degree	درجة
Depth	عمق
first search	تقصٍ عُمقي
Design	تصميم
Design a logic circuit	صَمِّم دارة منقطية
Diagonal	قُطر
relation	العلاقة القطرية
Diagram	شكل (رسم تخطيطي)
Diameter	قُطْر
Directed edge	ضلع مُوجَّه
graph	رسم مُوجَّه
Direct proof	البرهان مباشر
Discrete	مُتقطِّعْ
set	مجموعة متقطعة
Disjunction	فصل
Distance	مسافة
Distributive	توزيعي

مجال	Domain
ثَنوي	Dual
عبارة ثنوية	expression

E

ضلع	Edge
الكلمة الخالية	Empty word
يُشَفِّر	Encode
تشفير	Encoding (coding)
طرف	End point
تكافؤ	Equivalence
فصل تكافؤ	class
علاقة تكافؤ	relation
متكافيء	Equivalent
رسم أويلري	Eulerian graph
صيغة أويلر	Euler's formula
رأس زوجي	Even vertex
المسور الوجودي	Existential quantifier
تقرير وجودي	statement

F

وجه	Face
خاطيء	False

Figure	شكل
Finite graph	رسم مُنته
Forest	غابة
Form	شكل
Frequency	تكرار (تردد)
Function	دالة (تطبيق)

G

Gate	بوابة
Graph	رسم
theory	نظرية الرسومات

H

Hasse diagram	شكل هاس
Height	إرتفاع
Hexadecimal number system	النظام الستة عشري
Hypothesis	فرضية (فرض)
Hypothetical	فرضي

I

Idempotent law	قانون الجمود
Identity element	العنصر المحايد
Image	صورة

Immediate predecessor	مرجع مباشر
successor	تابع مباشر
Incidence matrix	مصفوفة الوقوع
Inconsistent	غير متسق
Induce	يُحدث
Induced by	مُحْدَث بوساطة
Induce subgraph	الرسم الجزئي المُحْدَث
Inductive step	خطوة الاستقراء
Infix notation	الترميز الداخلي
Input	القيمة المُدخلة
Integer	عدد صحيح
Internal vertex	رأس داخلي
Intersection	تقاطع
Inorder traversal	تسلق داخلي
Invalid	باطل
Invariant	لامتغير
Inverse	معاكس
relation	العلاقة العكسية
Invertor	بوابة معاكسة
Isolated vertex	رأس منعزل
Isomorphic	متماثل
invariant	لامتغير تماثلي

Isomorphism	تماثل

K

Karnaugh map	شكل كارنو

L

Label	علاقة (علَم)
Language	لغة
Law	قانون
Leaf	ورقة
Least element	عنصر أصغر (عنصر أصغري)
Length	طول
Letter	حرف
Level	مُستوى
Literal	حرف
Logically equivalent	متكافيء منطقيًا
implies	يقتضي منطقيًا
Logic circuit	دارة منطقية
gate	بوابة منطقية
Loop	عروة

M

Main diagonal	القُطر الرئيسي

Map	دالة (تطبيق)
Mapping	دالة (تطبيق)
Mathematical model	نموذج رياضي
induction	الاستقراء الرياضي
Maximal rectangle	مستطيل أعظمي
Maxterm	حَد أعظمي
Minimal	أصغري
Minimal And/Or circuit	دارة فصل وعطف أصغرية
product of sums	جُداء مجاميع أصغري
sum of products	مجموع جُداءات أصغري
Minterm	حد أصغري
Model	نموذج
Mod n	قياس n
Multiple edge	ضلع مُتكرر (مكرر)

N

NAND Gate	بوابة نفي العطف
Necessary and sufficient condtion	شرط لازم وكاف
condition	شرط لازم
Negation	نفي
Nines complement	متمم التسعات
Nor gate	بوابة نفي الفصل

Not gate	بوابة النفي
N-taple	نوني مرتب (عديد من نوع n)
Number systems	الأنظمة العددية

O

Octal system	النظام الثماني
Odd	فردي
vertex	رأس فردي
One-to-one	أحادي (متباين)
Only if	فقط إذا
Onto	شامل (غامر)
Open	مفتوح
sentence	مسند (جملة مفتوحة)
Optimal	أمثل
Ordered	مرتب
pair	زوج مرتَّب
Order relation	علاقة ترتيب
Or gate	بوابة الفصل
Output	القيمة المخرجة

P

Partially ordered set	مجموعة مرتبة جزئيًا
Partial order relation	علاقة ترتيب جزئي

Partition	تجزئة
Path	ممَر
Permutations	التباديل
Pigeonhole principle	مبدأ برج الحمام
Planar graph	رسم مستو
Polish postfix notation	الترميز البولندي العكسي
prefix notation	الترميز البولندي (المباشر)
Poset	مجموعة مرتبة جزئياً
Postorder traversal	تسلق عكسي
Power set	مجموعة القوة
Predecessor	مرجع
Predicate	مسند (جملة مفتوحة)
calculus	حساب المسندات
Prefix	صدر (سابقة)
property	خاصة الصَّدر
Premise	مقدمة منطقية
Preorder traversal	تسلق مباشر
Prime implicant	الحد المُقتضي الأولي
number	عدد أولي
Principle	مبدأ
of duality	مبدأ الثنوية
Product	جداء (حاصل الضرب)

Proof by cases	البرهان بوساطة الحالات
conterexample	البرهان بوساطة المثال المناقض
contradiction	البرهان بوساطة التناقض
contraposition	البرهان بوساطة المكافيء العكسي
exhaustion	البرهان بوساطة الاستنفاد
Propositional expression	عبارة تقريرية
form	عبارة تقريرية
function	مسند (جملة مفتوحة)

Q

Quantified statement	تقرير مُسَوَّر
Quantifier	مُسَوِّر

R

Range	مدى
Rational number	عدد كسري
Rectangle	مستطيل
Recursively	إرتداديًا
Reflexive	انعكاسية
closure	الإغلاق الانعكاسي
Region	منطقة
Regular binary tree	شجرة ثنائية منتظمة
graph	رسم منتظم

Relation	علاقة
on	علاقة على
Representation	تمثيل
Root	جذر
Row	صف

S

Semi-Eulerian graph	رسم نصف أويلري
Sequence	متتالية
Simple	بسيط
statement	تقرير بسيط
Simplification	تبسيط
Spanning (subgraph)	مُولّد (رسم جزئي مولّد)
tree	شجرة مُولّدة
Statement (proposition)	تقرير
form	عبارة تقريرية
variable	متغير تقريري
Subgraph	رسم جزئي
Substitution	تعويض
Subtree	شجرة جزئية
Successor	تابع
Sufficient condition	شرط كاف

Symmetric	تناظرية
closure	الإغلاق التناظري
matrix	مصفوفة متماثلة (متناظرة)

T

Table	جَدْول
Tautological statement	تقرير مصدوقي
Tautology	مصدوقة
Tens complement	متمم العشرات
Term	حَد
Total order relation	علاقة تركيب كلي
Trail	طريق
Transitive	متعدية
closure	الإغلاق المتعدي
Tree	شجرة
True	صائب
Trivially true	صائب بشكل تافه
Truth set	مجموعة الصواب
table	جدول الصواب
value	قيمة الصواب

U

Unary operation	عملية أحادية

Underlying	الرسم الرَّديف
Union	إتحاد
Unique	وحيد
Uniqueness	وَحدانية
Universal conditional statement	تقرير شرطي شامل
quantifier	المسوِّر الشامل
statement	تقرير شامل

V

Vacuously true	صائب فراغيًا
Valid	صحيح
Validity	صحة
Venn diagram	شكل ڤن
Vertex	رأس

W

Walk	مسار
Weight	وزن
Well-ordering	ترتيب حسن
Word	كلمة

كشاف الموضوعات

Subject Index

أ



ت

ج

ح

د

ر

ص

ض

ط

ع



نبذة عن المؤلفين

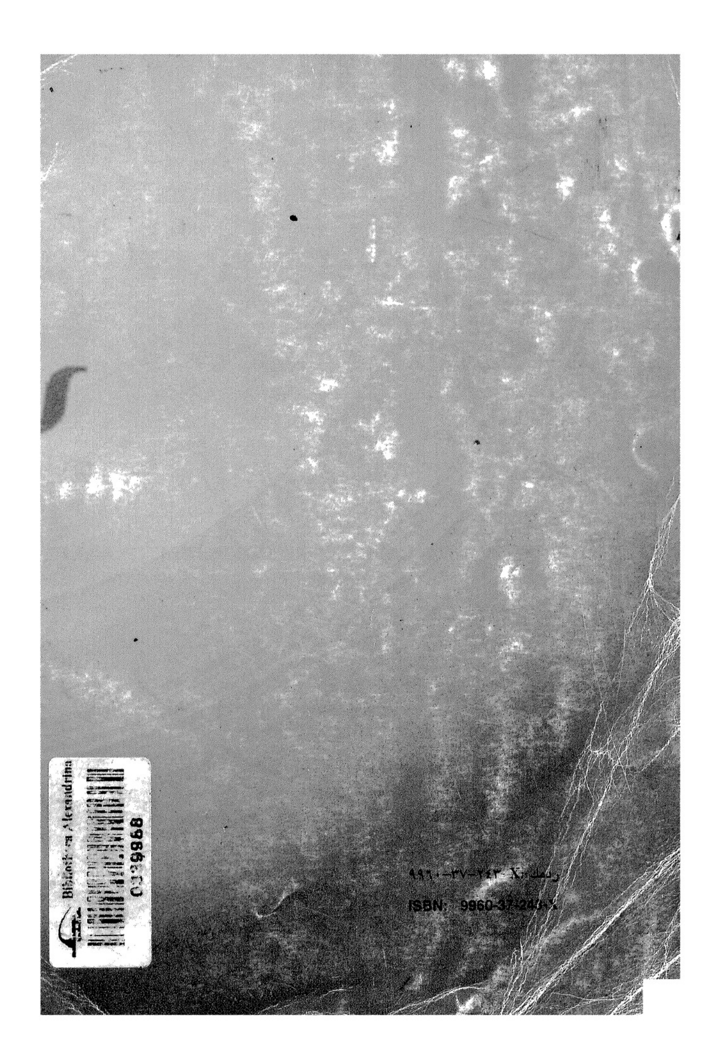
الدكتور معروف عبدالرحمن سمحان

أستاذ مشارك في قسم الرياضيات بجامعة الملك سعود. حصل على الدكتوراه في الرياضيات من جامعة الينوي في الولايات المتحدة الأمريكية عام ١٩٨٥م. عضو في عدة لجان داخل قسم الرياضيات وممثل قسم الرياضيات في مركز البحوث في كلية العلوم. قام بنشر العديد من الأبحاث في الجبر الشامل والأنظمة الجبرية المشوشة، وشارك في مؤتمرات عالمية في المجموعات المشوشة وتطبيقاتها. كما شارك في تأليف كتاب في نظرية الأعداد بالإضافة إلى ترجمة العديد من المراجع في الرياضيات، كذلك قام بالاشتراك في وضع معجم في الرياضيات (إنجليزي - عربي وعربي - إنجليزي).

الدكتور أحمد حميد شراري

أستاذ مشارك في قسم الرياضيات بجامعة الملك سعود. حصل على الدكتوراه في الرياضيات من جامعة الشرق الأوسط التقنية في تركيا عام ١٩٨٢م. عضو في عدة لجان بقسم الرياضيات. قام بنشر العديد من الأبحاث في الرياضيات المتقطعة، كما شارك في ترجمة بعض المراجع إلى العربية.




Bibliotheca Alexandrina
0139968
ردمك: X-٩٩٦٠-٣٧-٢٤٣
ISBN: 9960-37-243-X